ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 17 August 1937 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die turbulente Strömung an welligen Wänden.

Von *Heinz Motzfeld* in Göttingen.

1. Einleitung. Für die Frage nach der Entstehung von Wasserwellen durch den Wind ist es von Bedeutung, die Verteilung der Windgeschwindigkeiten über dem welligen Wasserspiegel zu kennen, ebenso den Widerstand, den eine solche Fläche dem Winde entgegensetzt, oder auch die Druckverteilung, die der Wind an der welligen Oberfläche hervorruft. Es scheint nicht sicher, die Ergebnisse der turbulenten Strömung an glatten und rauhen Wänden, wie sie sich aus theoretischen Überlegungen von Prandtl[1]) und von v. Kármán[2]) und aus Messungen im glatten und rauhen Kreisrohr von Nikuradse[3]) ergeben, auf die wellige Wand zu übertragen, da nach Hopf[4]) und Fromm[5]) zwischen der „Wandwelligkeit" und der „Wandrauhigkeit" scharf zu unterscheiden ist. Im folgenden soll nun über Strömungsversuche berichtet werden, die an festen Wellenmodellen durchgeführt wurden.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt von Herrn Prof. Dr. L. Prandtl, dem ich auch für die vielen weiteren Hinweise bei der Durchführung der Versuche zu Dank verpflichtet bin.

Die Messungen wurden im Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen durchgeführt, wo auch die Apparatur hergestellt wurde.

2. Versuchseinrichtung. Das den Luftstrom erzeugende zweistufige Axialgebläse wurde von einem Elektromotor von 10 PS angetrieben, dessen Tourenzahl mittels eines veränderlichen Feldwiderstandes gut reguliert werden konnte. Die Luft gelangte aus dem Gebläse durch einen Diffusor und einen Gleichrichter in eine Beruhigungsstrecke mit eingebautem Druckregler Schrenkscher Bauart[6]). Hieran schloß sich ein Übergangsstück an, welches von dem kreisförmigen Querschnitt zu einem rechteckigen Kanal von der Höhe 200 mm, der Breite 600 mm und der Länge 6000 mm überleitete (Abb. 1).

Bei der Prüfung der Strömung am Ende des Kanals zeigte sich eine unregelmäßige Geschwindigkeitsverteilung. Da sich ergab, daß die Störungen durch ungleichmäßigen Turbulenzbeginn in der Gleitschicht beim Eintritt in den Kanal entstanden, wurde, um ein

[1]) L. Prandtl: Ausgebildete Turbulenz. Verhandl. II. Intern. Kongr. für Techn. Mechanik, Zürich 1926.
[2]) Th. v. Kármán: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1930, S. 58.
[3]) J. Nikuradse: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsheft Nr. 356, Berlin 1932. Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft Nr. 361, Berlin 1933.
[4]) L. Hopf: Die Messung der hydraulischen Rauhigkeit. ZAMM, Bd. 3, 1923.
[5]) K. Fromm: Strömungswiderstand in rauhen Rohren. ZAMM, Bd. 3, 1923.
[6]) O. Schrenk: Ing.-Arch. I (1930), S. 350.

normales Geschwindigkeitsprofil zu bekommen (Abb. 2), am Anfang des Kanals an den beiden langen Rechteckseiten ein Einlauf angebracht, wie ihn untenstehende Skizze (Abb. 3) im Querschnitt veranschaulicht. Dieser Einlauf wurde derart hergestellt, daß zuerst ein Rundstab von 6 mm Durchmesser eingelötet wurde. An diesen wurde ein zweiter von 2 mm Durchmesser angelötet und dann der Nachlauf hinter den Stäben mit Plastilin ausgefüllt. Durch die an diesem Einlauf erzeugten Wirbel wurde ein einheitlicher Turbulenzbeginn erreicht.

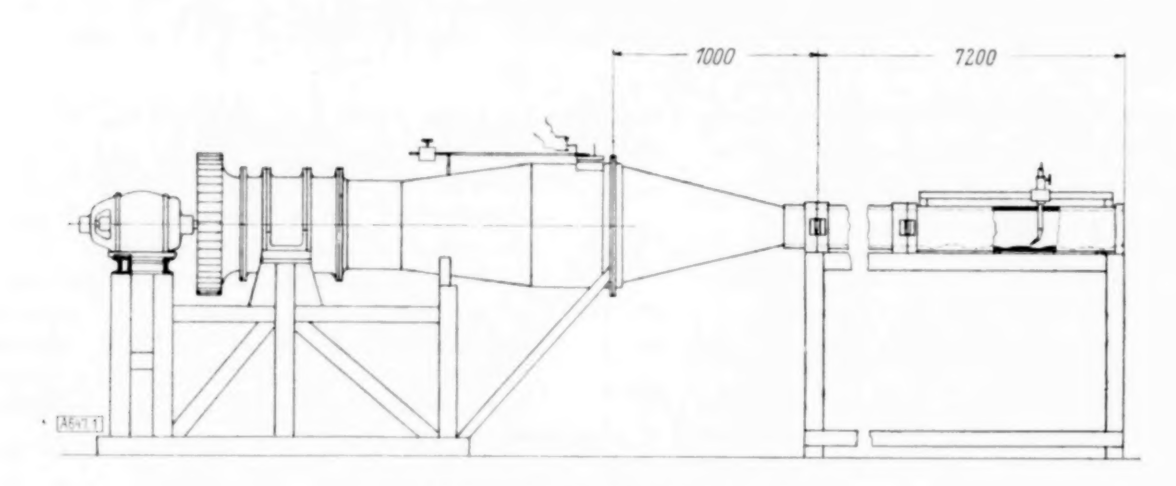


Abb. 1. Versuchseinrichtung.

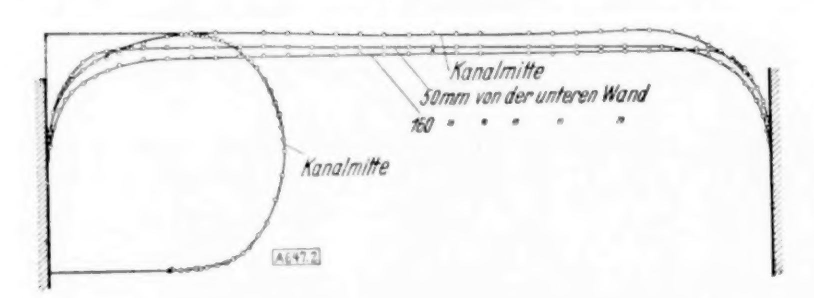


Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung im rechteckigen Kanal.



Abb. 3. Einlauf.

Die Meßstrecke (Abb. 4) bestand aus einem rechteckigen an der Unterseite offenen Holzkasten von der Höhe und Breite des Kanals und einer Länge von 1200 mm. Dieser Kasten wurde am Ende des Kanals mit diesem fest und dicht verbunden. Als Dichtung dienten eingelegte Filzstreifen. Um das Einstellen der Drucksonden zu erleichtern, waren an den Seitenwänden Glasfenster angebracht. An der Unterseite trug der Kasten am vorderen und hinteren Ende je eine Versteifungsleiste von 150 mm Breite. In die bleibende Öffnung von 900×600 mm wurden jeweilig die Wellenmodelle eingesetzt und mit dem Kasten verschraubt. Vorhandene Undichtigkeiten wurden mit Plastilin verkittet.

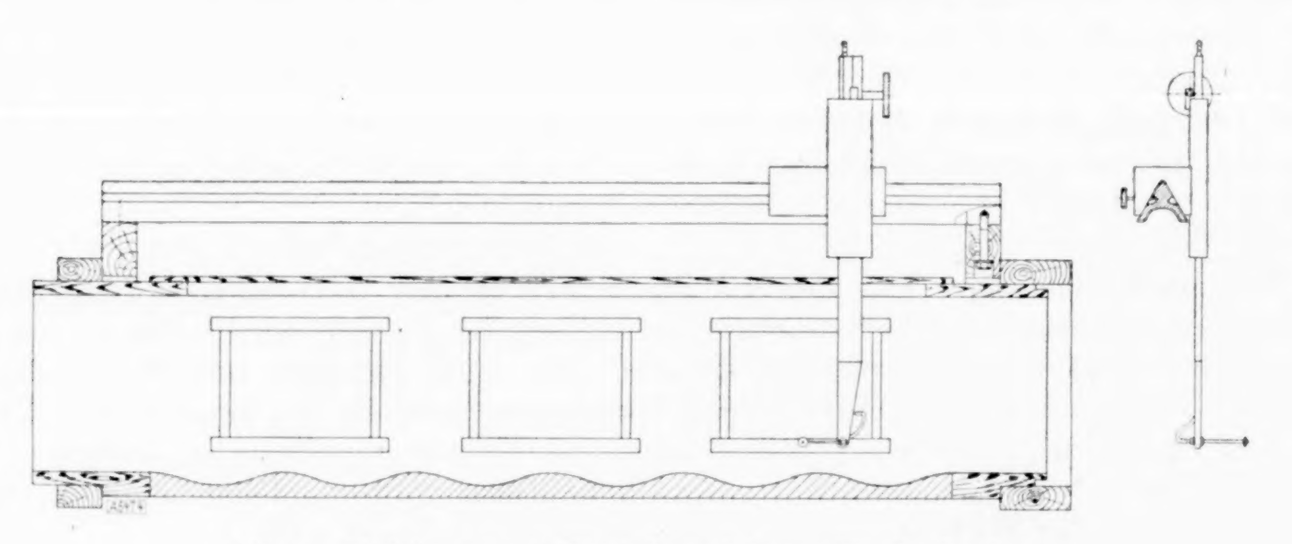


Abb. 4. Meßstrecke mit Einstellvorrichtung für die Sonden.

Die obere Wand des Meßkastens war in der Mitte mit einem in Strömungsrichtung verlaufenden Spalt versehen, durch den sich die Sonden einführen ließen. Während der Messungen verschlossen Sperrholzbrettchen das jeweilig offene Stück desselben, die mittels einer Messingschiene fest angedrückt wurden. Parallel zu dem Spalt verlief in der Mitte des Kastens, auf zwei Querbalken ruhend, eine optische Schiene, an deren Schlitten die Einstellvorrichtung für die Drucksonden angebracht war. Durch diese Art der Anordnung wurde ein Schwingen der Sonden während der Messungen vermieden.

Die Einstellvorrichtung (Abb. 4) bestand aus einer Führung, in der ein Profilrohr mittels einer Zahnstange und einem Handrad auf und ab bewegt werden konnte. Eine Millimeterskala mit Nonius ermöglichte eine auf $^1/_{10}$ mm genaue Einstellung. Am unteren sich verjüngenden Ende trug das Profilrohr einen um eine horizontale und zur Strömungsrichtung senkrechte Achse drehbaren 50 mm langen profilierten Stutzen, in dessen äußeres Ende sich die Sonden einschrauben ließen. Die ganze Anordnung war so getroffen, daß die Sondenöffnungen in die senkrechte in Strömungsrichtung verlaufende Symmetrieebene des Kanals zu liegen kamen. Ein Ventilschlauch stellte die Verbindung der Druckleitungen des Stutzens und des Profilrohres her.

Der Gesamtdruck g wurde mit einem Pitotrohr gemessen von 0,5 mm Innendurchmesser, welches in der Mitte leicht gewinkelt war (Abb. 5a). Da es bei zwei Modellen nicht gelang, mit diesem Pitotrohr in die Wellentäler hineinzukommen, wurde hier ein zweites Rohr verwandt. Dieses war rechtwinklig gebogen. Der Schenkel mit der Meßöffnung hatte eine Länge von 10 mm (Abb. 5b). Beide Pitotrohre hatten den Eichfaktor 1 und waren bis $\pm 18^0$ richtungsunempfindlich. In Meßquerschnitten, wo die Tangente an das Wellenmodell mit der Horizontalen einen größeren Winkel als 18^0 bildete, wurden die Drucke gemessen einmal mit zur Tangente parallel gestelltem Pitotrohr, ein andermal mit horizontalem Pitotrohr. Eine dieser Messungen lag dann immer innerhalb der Grenze der Richtungsunempfindlichkeit, und zwar jeweilig der größere Wert.

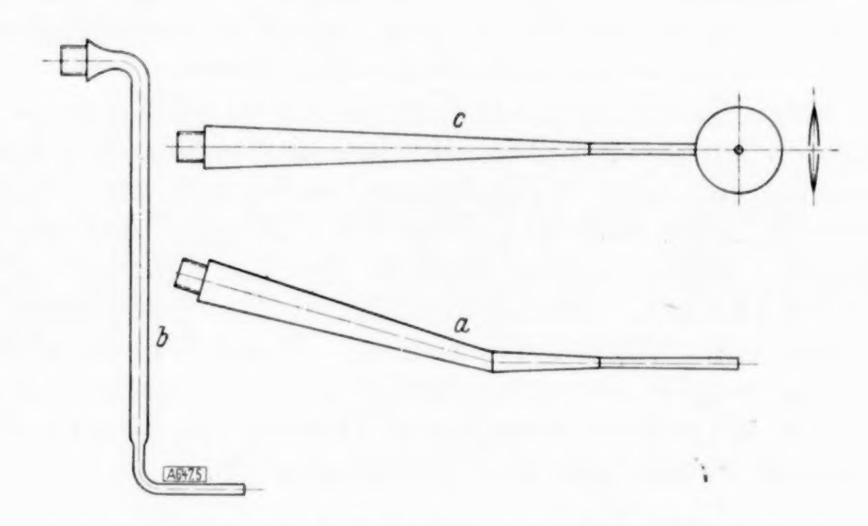


Abb. 5. a), b) Pitotrohre, c) statische Sonde.

Wegen der durch die Wellen hervorgerufenen Änderung der Strömungsrichtung wurde zur Bestimmung des statischen Druckes p eine linsenförmige Sonde (Abb. 5c) von 8 mm Durchmesser und 1 mm maximaler Stärke, die in der Mitte der gewölbten Flächen je eine Anbohrung von 0,6 mm Durchmesser hatte, verwandt. Die Sonde wurde derart in die Strömung eingeführt, daß die Linsenebene mit der senkrechten in Strömungsrichtung verlaufenden Symmetrieebene des Meßkastens zusammenfiel.

Die Eichung der statischen Sonde wurde in dem Freistrahl am Ende des 6 m langen Kanals durchgeführt. Hierbei wurde der statische Druck im Freistrahl gleich Null angenommen. Die Sonde zeigte einen Prozentsatz des Staudruckes q als Unterdruck an, wobei sich ein kleiner Gang mit der Reynoldsschen Zahl ergab, der aber zu vernachlässigen war. Der Mittelwert betrug $-0{,}14$ des Staudruckes. Zwar zeigte sich eine gewisse Abhängigkeit des Eichfaktors von der Art der Turbulenz, denn im Mischgebiet des Strahles stieg der Koeffizient absolut genommen mit Annäherung an die ruhende Luft. Eine zweite Eichung in einem Kreisrohr mit turbulenter Strömung, wobei der statische Druck durch Wandanbohrungen bestimmt werden konnte, ergab ebenfalls den Faktor $-0{,}14$. Die Prüfung der Richtungsunempfindlichkeit ergab eine Unabhängigkeit von der Anblaserichtung, die mit der Linsenebene einen Winkel einschließt, bis $\pm 4^0$ für diesen Winkel. Der mit der Sonde gemessene Wert ist also

$$p' = p - 0{,}14\, q,$$

das Pitotrohr ergibt

$$g = p + q,$$

somit ist

$$q = \frac{g - p'}{1{,}14} \quad \text{und} \quad p = \frac{0{,}14\, g + p'}{1{,}14}.$$

Die Drucke wurden mit Prandtl-Manometern gegen den Außendruck gemessen.

Die Wellenmodelle wurden derart hergestellt, daß zuerst aus Eisenblech die ungefähre Form gebogen wurde. Dieses so vorbereitete Blech schweißte man zur Versteifung in einen rechteckigen Winkeleisenrahmen von 600 × 900 mm Größe, der, um ein Verziehen zu vermeiden, noch mit zwei Rundeisen parallel zur kurzen Rechteckseite und zwei Flacheisen mit ausgefeiltem Wellenprofil parallel zur langen Rechteckseite versehen war. Dann wurde Gips aufgetragen und mit einer Schablone die genaue Wellenform hergestellt. Durch Lacküberzug und Politur erzielte man eine einwandfreie glatte Oberfläche. Bei dem zweiten, dritten und vierten Modell befand sich zur Bestimmung des Druckverlaufes an der Wand in der Mitte senkrecht zu den Wellenkämmen, d. h. in Strömungsrichtung, ein Messingstreifen mit Anbohrungen, die nach unten zu Schlauchtüllen führten.

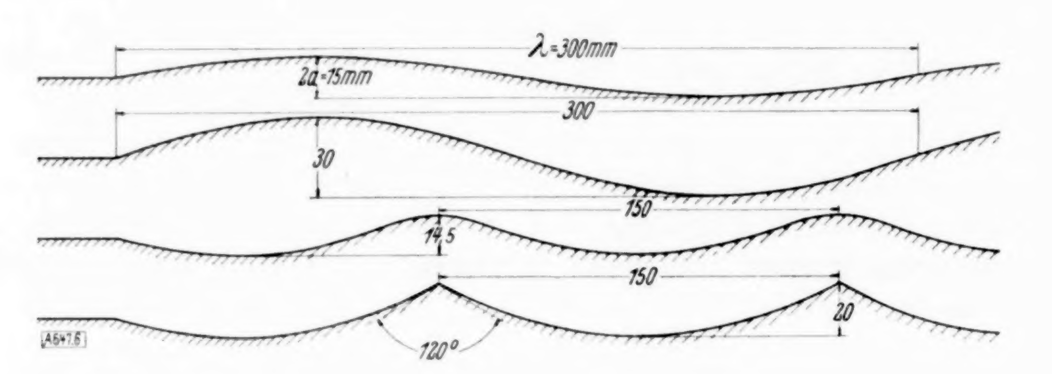


Abb. 6. Profile der untersuchten Wellen.

Es wurden Messungen an 4 Modellen durchgeführt (Abb. 6). Das erste bestand aus einem Zug von 3 Sinuswellen mit einer Wellenlänge $\lambda = 300$ mm und einer Höhe $2a = 15$ mm. Das zweite war entsprechend, hatte aber eine Höhe $2a = 30$ mm. Aus einem Zug von 6 Wellen bestand das dritte Modell. Diese hatten nahezu Trochoidenform. Die Wellenlänge war $\lambda = 150$ mm, die Höhe $2a = 14{,}5$ mm. Ebenfalls bestand das vierte Modell aus 6 Einzelwellen der Länge $\lambda = 150$ mm und einer Höhe $2a = 20$ mm. Diese Wellen hatten scharfe Kämme. Der einfacheren Herstellung wegen waren es Kreisbögen, die unter einem Winkel von 120° aneinanderstießen. Die von Mitchell[7]) nach der Theorie von Stokes[8]) berechnete höchstmögliche Wasserwelle weicht etwas von dem Kreisbogen ab.

3. Versuchsergebnisse. a) Druckverlauf an der Wand und Widerstand der Wellen. Da in der vorliegenden Arbeit das zweidimensionale Problem der turbulenten Strömung an welliger Wand untersucht wird, so sei die Koordinatenebene die in Strömungsrichtung verlaufende lotrechte Symmetrieebene des Kanals. Die positive x-Achse zeige in die Hauptströmungsrichtung, die positive y-Achse senkrecht nach oben. Der Ursprung liege auf der Verlängerung des unteren Kanalbodens senkrecht unter dem vorletzten Wellenkamm. Die Auslenkung der Wellen aus der x-Achse als Ruhelage sei mit $\eta(x)$ bezeichnet.

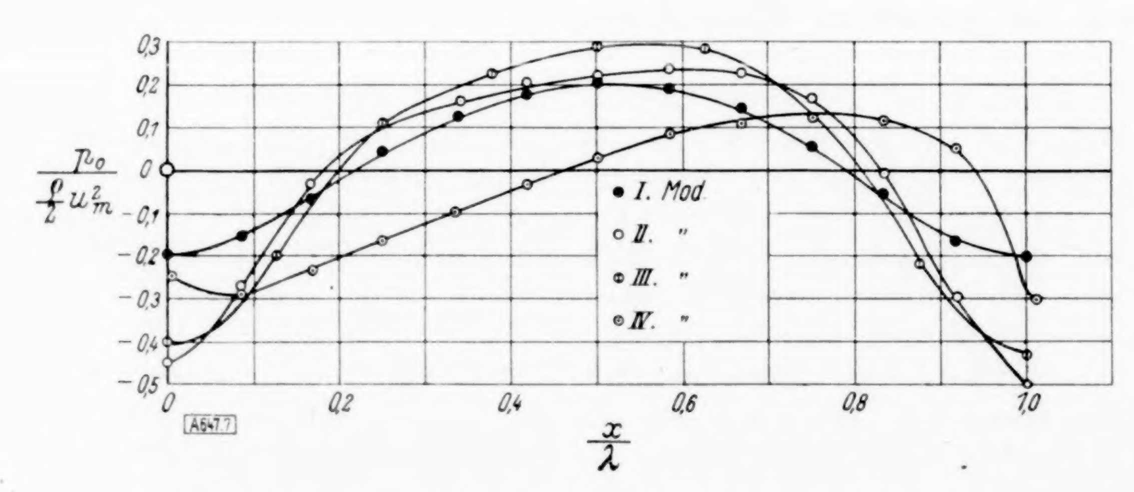


Abb. 7. Druckverlauf an der Wand in Abhängigkeit von x.

In Abb. 7 ist der Druckverlauf an der Wand für die vier Wellenmodelle über $\frac{x}{\lambda}$ aufgetragen und in Abb. 8 über $\frac{\eta}{2a}$. Während der Druck p_0 bei dem ersten Modell noch nahezu proportional η verläuft, ist dies bei dem zweiten und dritten Modell wegen des Anwachsens der Gleitschicht im Tal nicht mehr der Fall. Durch den Ablösungsvorgang hinter

[7]) J. H. Mitchell: On the highest waves in water. Phil. Mag. (5) XXXVI London.
[8]) G. G. Stokes: Theory of waves, including tides. Brit. Ass. Rep. 1846, Tl. 1, S. 1. 77.

dem Kamm des vierten Modells nimmt der Winddruck hier einen gänzlich anderen Verlauf. Ähnliche Messungen wurden von Th. Stanton[9]) durchgeführt. Die von ihm untersuchten Wellen haben Sinusform, deren Amplitude groß ist, so daß die Strömung an der Leeseite der Welle abreißt.

Der Druckwiderstand der Wellen wurde aus dem Druckverlauf an der Wand durch Integration bestimmt. Es ist für die Breite Eins der Druckwiderstand

$$W_d = \int_0^S p \sin \alpha \, d s ,$$

wenn

S die Länge der Abwickelung der Welle,

$d s$ ein Element derselben und

α der Winkel, den das Element $d s$ mit der Hauptströmungsrichtung bildet.

Da $d s \sin \alpha = d \eta$, so findet man den Druckwiderstand als den Flächeninhalt, der von der Kurve $p(\eta)$ eingeschlossen wird.

Wegen des Druckabfalles im Kanal sind die Inhalte nicht gleich, wenn man von Wellenberg bis Wellenberg oder von Wellental bis Wellental integriert. Bei einem dem periodischen Druckverlauf sich überlagernden linearen Druckabfall erhält man den wahren Druckwiderstand durch Mittelwertbildung aus diesen beiden Flächeninhalten.

Für die beiden ersten Modelle wurde der Widerstand für drei verschiedene Geschwindigkeiten bestimmt, für das dritte und vierte Modell für je vier. Es wurde bei allen Modellen eine quadratische Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl festgestellt. Die sich ergebenden Beiwerte des Druckwiderstandes

$$c_d = \frac{W_d}{\frac{\varrho \, u^2{}_m}{2} \lambda} \quad ^{10})$$

mit u_m = Maximalgeschwindigkeit sind aus der Tabelle 1 zu entnehmen.

Tabelle 1.

Modell	$Re = \frac{u_m \cdot \lambda}{\nu}$	$c_d = \frac{W_d}{\frac{\varrho \, u_m^2}{2} \lambda}$	$c_r = \frac{W_r}{\frac{\varrho \, u_m^2}{2} \lambda}$	$c = c_d + c_r$	obere Wand $c_r{}^0$
1	330000	0,00085	0,00375	0,00460	0,00345—0,00400
2	330000	0,0024	0,0038	0,0062	0,00365—0,00420
3	165000	0,0028	0,0035	0,0063	0,0034 —0,00395
4	95000	0,0195	0,0026	0,0221	0,00425
4	174500	0,0194	0,0028	0,0222	0,00410
4	209000	0,0194	0,0028	0,0222	0,00395
4	267000	0,0195	0,00295	0,02245	0,00365

Der Druckabfall im Kanal konnte wegen des kurzen Wellenstückes nicht genau ermittelt werden, so daß sich der Reibungsanteil des Widerstandes nur nahezu berechnen ließ.

Ist der Druckabfall über eine Wellenlänge Δp, der Reibungswiderstand der oberen glatten Wand $W_r{}^0$, der der welligen W_r und ist die Kanalhöhe h, dann lautet der Impulssatz für die Breite Eins

$$W_r = \Delta p \cdot h - W_r{}^0 - W_d .$$

[9]) Th. Stanton: Marschall and Houghton: The growth of Waves in Water due of the Action of the Wind. Proc. Roy. Soc. Ser. A 137, 1932.

[10]) Bei den Modellen I bis III ist unter u_m das Maximum des Geschwindigkeitsprofils über den Punkten $\eta = 0$ der Wellen verstanden.

Der Widerstand der glatten Wand wurde nach dem universellen Wandreibungsgesetz der turbulenten Strömung von Prandtl und v. Kármán[11]) ermittelt. Hiernach gilt für die Verteilung der Geschwindigkeit an der Wand

$$u = 5{,}75\, v_* \log y + \text{const} \quad \text{mit} \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}\,,$$

wenn τ die Wandschubspannung und ϱ die Dichte der Luft bedeuten. Es wurden also die gemessenen Geschwindigkeiten u[12]) über $\log y$ aufgetragen und aus der Richtung der durch die Meßpunkte hindurchgelegten Geraden v_* bzw. τ bestimmt. Die gefundenen Werte des Gesamtwiderstandes der Wellen sind ebenfalls aus der Tabelle 1 zu entnehmen.

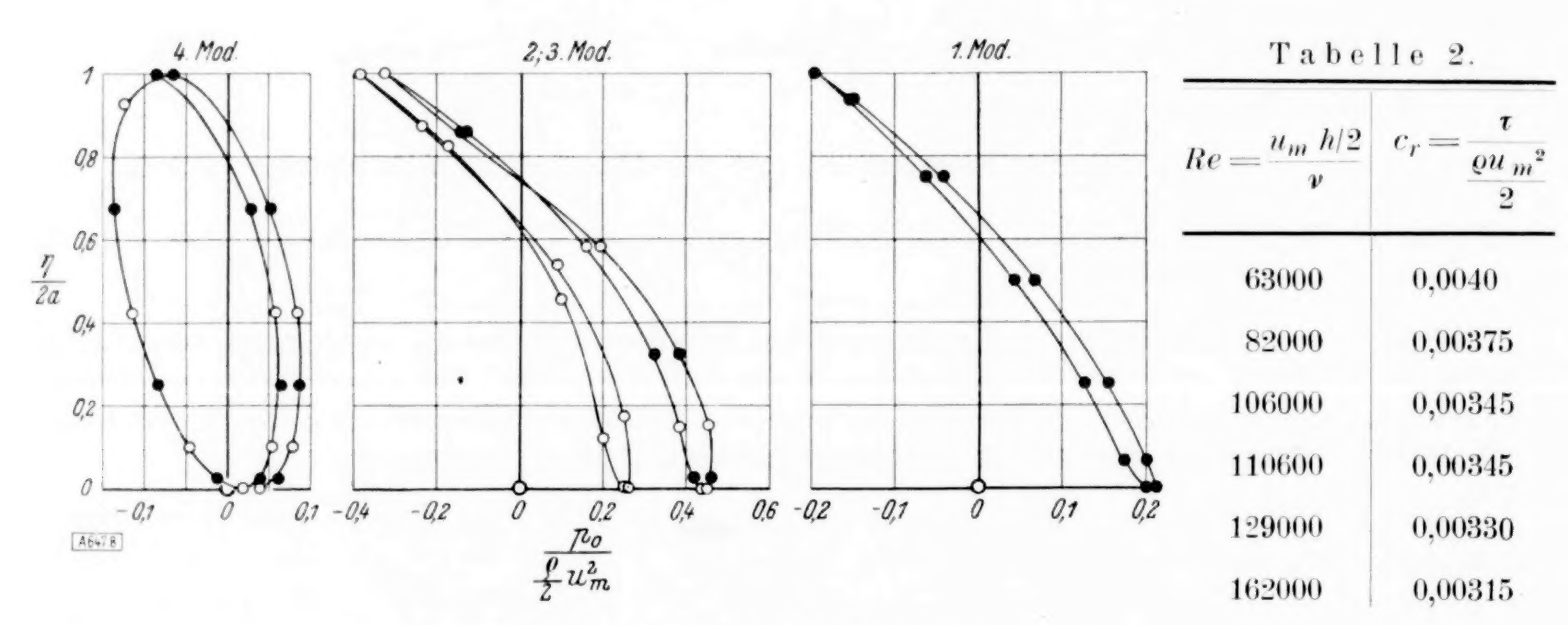


Tabelle 2.

$Re = \frac{u_m\, h/2}{\nu}$	$c_r = \frac{\tau}{\frac{\varrho u_m^2}{2}}$
63000	0,0040
82000	0,00375
106000	0,00345
110600	0,00345
129000	0,00330
162000	0,00315

Abb. 8. Druckverlauf an der Wand in Abhängigkeit von η.

Für einige Reynoldssche Zahlen wurden auch die Geschwindigkeitsverteilungen an der ebenen Kanalwand (ohne eingebaute Wellen) bestimmt und aus diesen der Widerstand der Wand ermittelt. Die gefundenen Beiwerte

$$c_r = \frac{\tau}{\frac{\varrho\, u_m^2}{2}}$$

gibt Tabelle 2.

b) Geschwindigkeitsverteilung. Die Verteilung der Geschwindigkeit wurde bei den beiden ersten Wellenmodellen für drei, bei den übrigen für vier Reynoldssche Zahlen gemessen. Da sich die Kurven bei dimensionsloser Auftragung nur wenig voneinander unterscheiden, so sei jeweilig der Geschwindigkeitsverlauf bei einer mittleren Reynoldsschen Zahl ausgewählt. Abb. 9 zeigt diesen für das flache Sinusprofil. Die Strömung liegt überall an. Der Gradient der Geschwindigkeit dicht an der Wand ist bei Druckabfall größer als bei Druckanstieg. In Abb. 10 sehen wir dasselbe für das zweite Sinusprofil. Auch hier liegt die Strömung noch an. Im Wellental zeigt das Pitotrohr in Wandnähe, wie man aus den Geschwindigkeitsprofilen erkennt, zu große Mittelwerte, so daß zu vermuten ist, daß hier zeitlich Rückströmungen auftreten, die, da sie das Pitotrohr rückwärts anströmen, nicht mit ihrem wahren Wert in den Mittelwert eingehen. Auf den Wellenkämmen herrscht in Nähe der Wand ein starker Geschwindigkeitsanstieg, der mit wachsender Reynoldsscher Zahl noch zunimmt. In Abb. 11 ist die Geschwindigkeitsverteilung für das zweite Sinusprofil aufgetragen bei geänderter Geschwindigkeitsverteilung im Kanal. Die Änderung wurde durch quadratische Leisten hervorgerufen, die auf der unteren Kanalwand über einer Strecke von 2 m vor dem Wellenstück aufgenagelt wurden.

Die gezeichneten Geschwindigkeitsprofile sind die über der letzten Welle der Modelle gemessenen. Die vorhergehenden entsprechenden Kurven zeigen in Wandnähe etwas kleinere Geschwindigkeiten. Es ist nicht zu sagen, ob die bei einer größeren Anzahl von Wellen sich endgültig ausbildenden Geschwindigkeitsprofile von denen der Abb. 9 bis 11 noch stark abweichen.

[11]) S. Fußnote S. 193 und auch L. Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Zeitschr. d. V. D. I. Bd. 77. Nr. 5, 1933.

[12]) Hierbei wurden die Geschwindigkeiten aus den einzelnen Profilen über einem Wellenzug gemittelt.

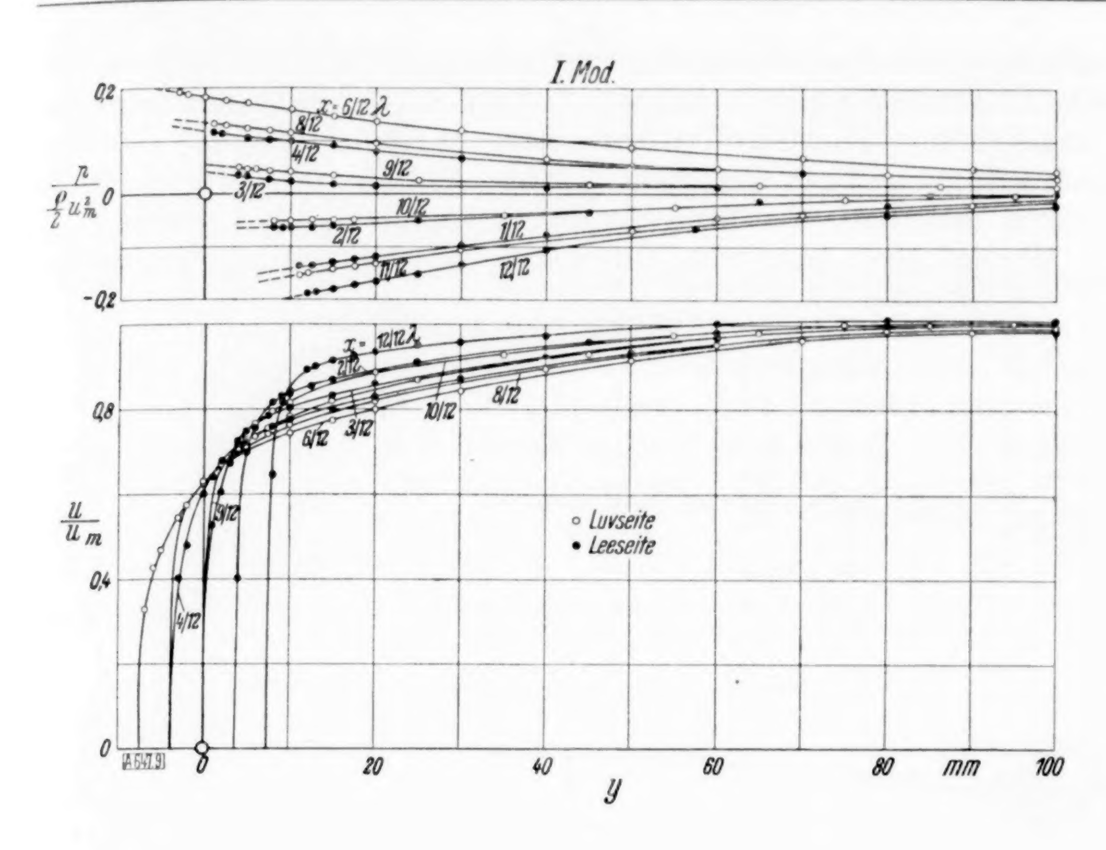


Abb. 9. Geschwindigkeitsverteilung über dem ersten Wellenmodell (unten) und Verlauf des statischen Druckes (oben).

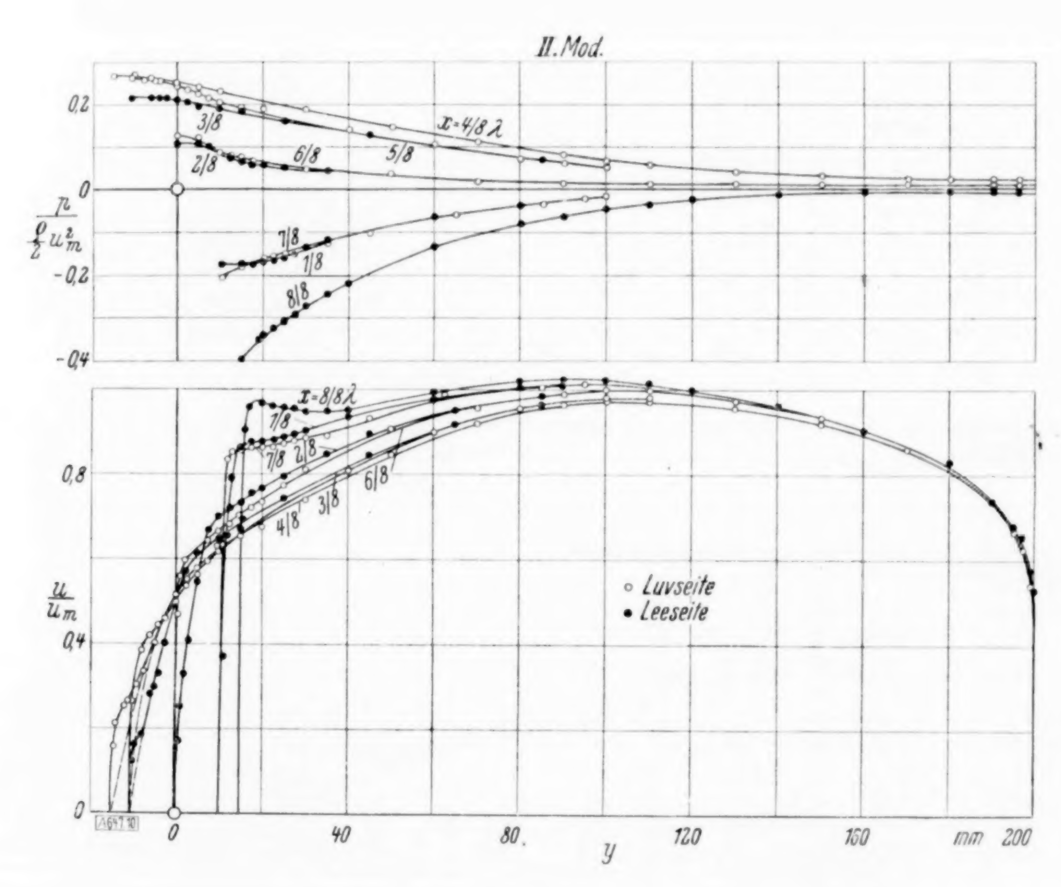


Abb. 10. Geschwindigkeitsverteilung über dem zweiten Wellenmodell (unten) und Verlauf des statischen Druckes (oben).

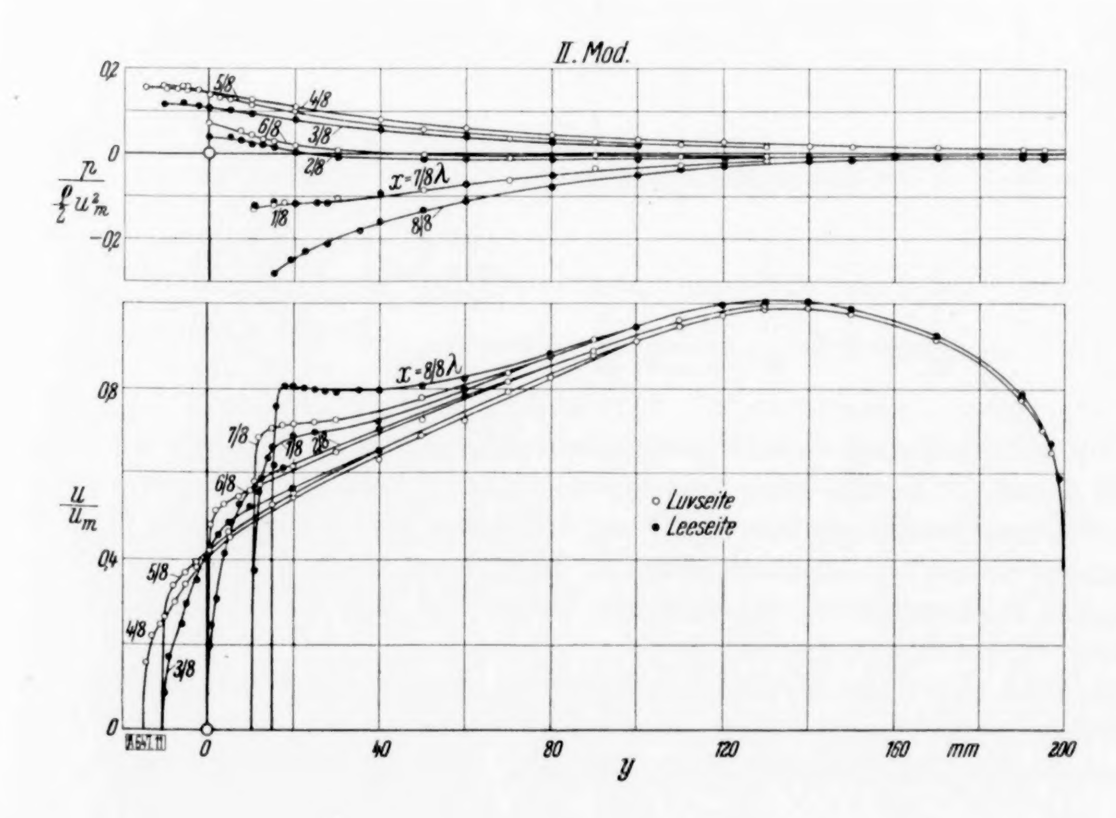


Abb. 11. Geschwindigkeitsverteilung über dem zweiten Wellenmodell (unten) und Verlauf des statischen Druckes (oben) bei verändertem Ausgangsprofil.

Bei dem dritten Modell wurden, um einen endgültigen Zustand zu bekommen, vor dem Wellenstück auf dem Kanalboden Halbrundleisten im Abstand der Länge der Trochoidenwelle über eine Strecke von 2,7 m angebracht. Hierdurch wurde erreicht, daß, falls die sich entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen über den drei letzten Wellen des Modells noch Unterschiede aufwiesen, diese dann innerhalb der Meßgenauigkeit lagen. Abb. 12 zeigt diese Geschwindigkeitsverteilungen. Wegen der besseren Übersicht wurden einige gemessene Kurven ausgelassen.

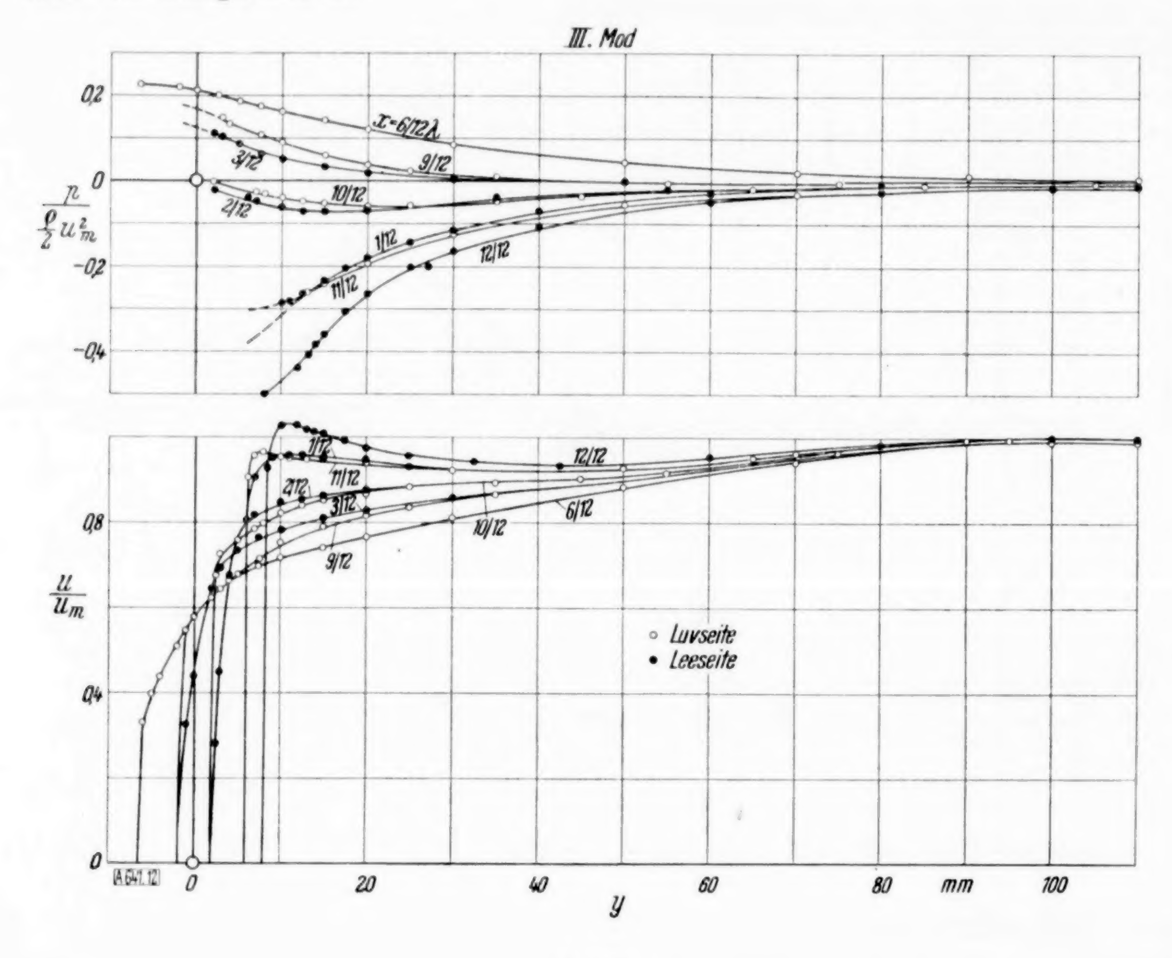


Abb. 12. Geschwindigkeitsverteilung über dem dritten Wellenmodell (unten) und Verlauf des statischen Druckes (oben).

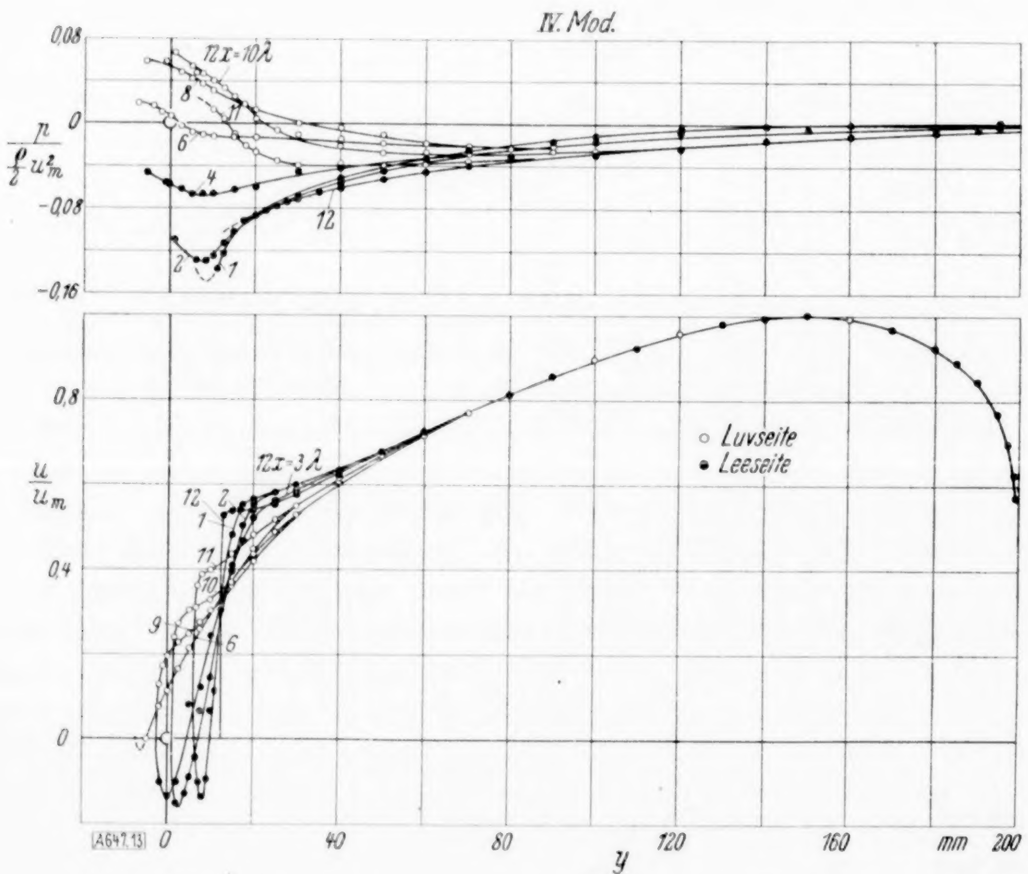


Abb. 13. Geschwindigkeitsverteilung über dem vierten Wellenmodell (unten) und Verlauf des statischen Druckes (oben).

Die bei dem dritten Wellenmodell auf dem Kanalboden aufgenagelten Halbrundleisten wurden bei dem vierten Modell durch Dreieckleisten ersetzt, wodurch ebenfalls das Gewünschte erreicht wurde. Abb. 13 gibt die Geschwindigkeitsverteilung über den scharfkämmigen Wellen wieder. Die Strömung, die hinter dem Wellenkamm abreißt, liegt im tiefsten Punkt des Tales wieder an. Wegen des größeren Widerstandes der unteren Wand ist das Geschwindigkeitsmaximum im Kanal zur glatten Wand hin verschoben.

In den Abb. 9 bis 13 ist über den Geschwindigkeitsprofilen der Verlauf des statischen Druckes im Innern der Strömung aufgetragen. Die durch Extrapolation gefundenen Werte an der Wand stimmen gut mit denen der Anbohrungen überein.

c) Stromlinien, Gesamtdruck auf den Stromlinien und Verteilung der scheinbaren Schubspannungen. Aus den Geschwindigkeitsprofilen wurden als Kurven

$$\int_0^y u\,d\,y = \text{const}$$

die Stromlinien bestimmt, wobei u mit dem Betrag der Geschwindigkeit identifiziert wurde. Es ist hierin eine geringe Vernachlässigung, da man dann eigentlich normal zu den Stromlinien hätte integrieren müssen. Die Strömungsbilder der drei letzten Wellenmodelle sind in den Abb. 14 bis 16 wiedergegeben. Die darüberliegenden Kurven zeigen den Verlauf des Gesamtdruckes auf den Stromlinien. Man sieht, daß hinter den Wellenkämmen auf den unteren Stromlinien ein Energieverlust eintritt, der dann stromabwärts weiter in das Innere der Strömung hineinreicht. Bei Abfall des statischen Druckes nimmt die Energie auf den unteren Stromlinien wieder zu. Dieser Energiegewinn stammt aus dem Innern der Strömung, da hier ein ständiger Gesamtdruckabfall auf den Stromlinien vorhanden ist.

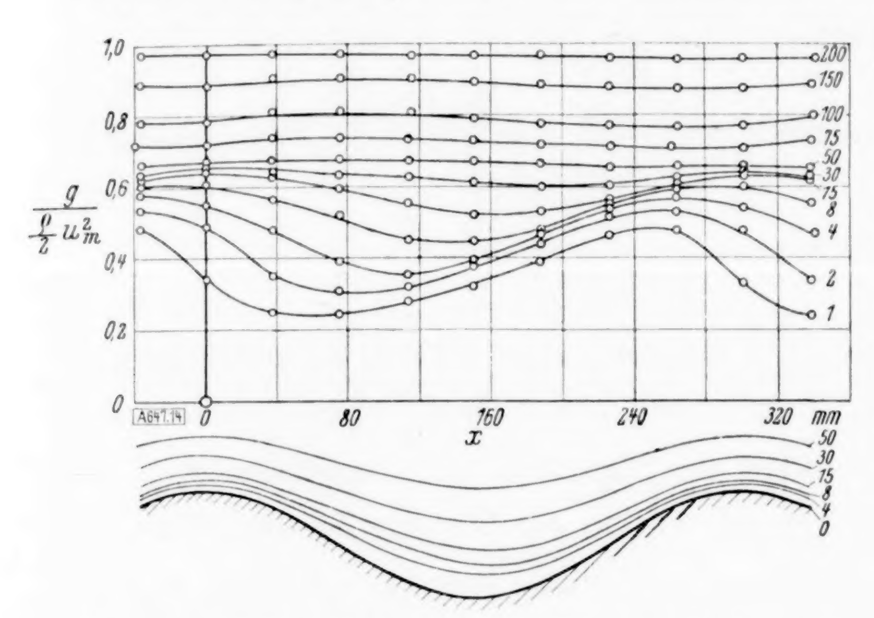
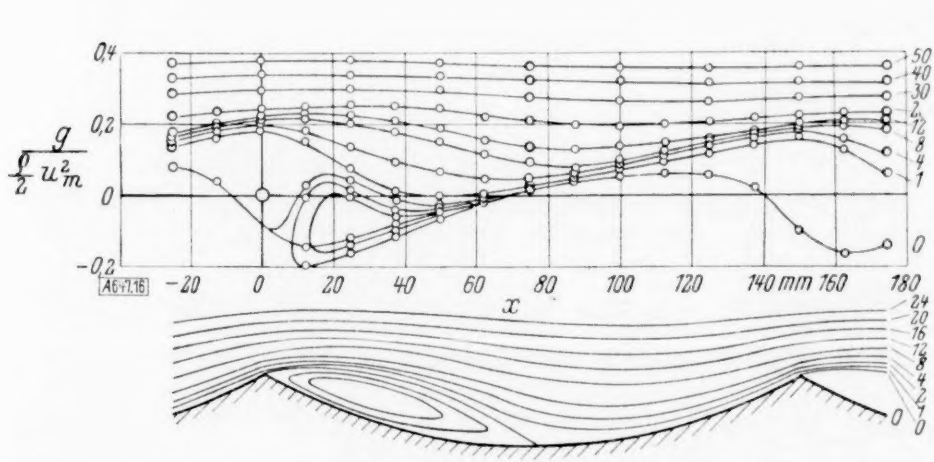


Abb. 14. Stromlinienbild (unten) und Verlauf des Gesamtdruckes auf den Stromlinien (oben) bei dem zweiten Wellenmodell.

Abb. 15. Stromlinienbild (unten) und Verlauf des Gesamtdruckes auf den Stromlinien (oben) bei dem dritten Wellenmodell.



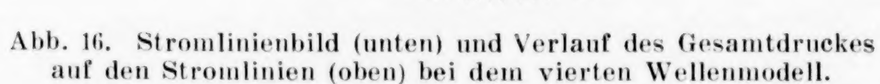


Abb. 16. Stromlinienbild (unten) und Verlauf des Gesamtdruckes auf den Stromlinien (oben) bei dem vierten Wellenmodell.

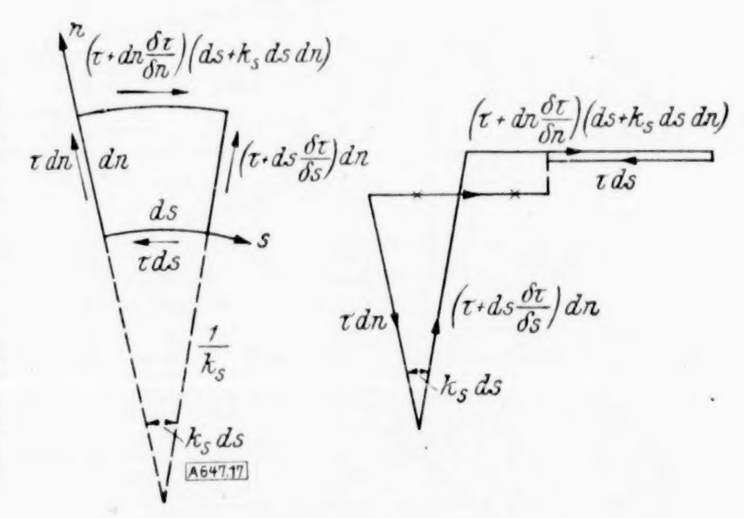


Abb. 17.

Die Verteilung der Schubspannung läßt sich bei turbulenter Strömung nicht aus dem Newtonschen Reibungsansatz $\tau = \mu \frac{d\,u}{d\,y}$ (μ = Zähigkeit der Flüssigkeit) ermitteln, da durch den Impulsaustausch der turbulenten Schwankungen noch eine scheinbare Reibung zwischen den einzelnen Schichten der Flüssigkeit hervorgerufen wird. Um die sogenannte scheinbare Schubspannung zu ermitteln, gehen wir aus von der ersten Bewegungsgleichung, die, wenn sie in jedem Punkt für die Richtung der durch ihn hindurchgehenden Stromlinie und der senkrechten Trajektorie zu den Stromlinien gilt, folgendermaßen lautet:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} + 2\,\tau\,k_s,$$

wenn ∂s ein Linienelement der Stromlinie, ∂n ein solches der Trajektorie und k_s die Krümmung der Stromlinie bedeutet.

Zu dieser Gleichung gelangt man, indem man ein Flüssigkeitselement betrachtet, das von einer Stromlinie, einer Parallelkurve dazu und zwei senkrechten Trajektorien begrenzt wird und die Breite Eins hat. Die Komponente in der s-Richtung der Resultierenden aus dem statischen Druck und den Schubspannungen ist gleich dem Produkt aus der Masse und der Beschleunigung in der s-Richtung des betrachteten Elementes. In Abb. 17 ist dieses Element mit den angreifenden Kräften dargestellt. Aus dem beigefügten Kräfteplan ergibt sich für die Komponente der Schubspannungen in der s-Richtung

$$\frac{1}{2}\tau k_s\, d\,s\, d\,n + \frac{1}{2}\left(\tau + d\,s\frac{\partial \tau}{\partial s}\right) k_s\, d\,s\, d\,n + \left(\tau + d\,n\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)(d\,s + k_s\, d\,s\, d\,n) - \tau\, d\,s\,.$$

Aus dem statischen Druck resultiert in der s-Richtung die Kraft $-d\,s\,d\,n\frac{\partial p}{\partial s}$, ferner ist Masse mal Beschleunigung gleich $\varrho\, d\,s\, d\,n\, u\frac{\partial u}{\partial s}$, also gilt, wenn wir durch $d\,n\,d\,s$ kürzen,

$$2\tau k_s + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial s} d\,s\, k_s + \frac{\partial \tau}{\partial n} + \frac{\partial \tau}{\partial s} k_s\, d\,n = \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\varrho}{2}\frac{\partial u^2}{\partial s}\,;$$

lassen wir nun $d\,n$ und $d\,s \rightarrow 0$ gehen und bedenken wir, daß $p + \frac{\varrho}{2}u^2 = g$ ist, so erhalten wir obige Gleichung

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} + 2\tau k_s\,.$$

Aus den Kurven der Abb. 14 bis 16 wurde $\frac{\partial g}{\partial x}$ bestimmt und über y aufgetragen und dann hierüber integriert. Wo es nötig erschien, wurde noch eine Korrektur angebracht unter Berücksichtigung des Gliedes $\frac{2\tau k_s}{\cos\alpha}$ (α Neigungswinkel der Tangente an die Stromlinie). Es sei aber darauf hingewiesen, daß die Integralkurven wegen der Ungenauigkeiten bei der Ermittelung von $\frac{\partial g}{\partial s}$ und k_s mehr nur einen qualitativen Verlauf der Schubspannungsverteilung geben können. Abb. 18 und 19 zeigen die Verteilung für das zweite und vierte Modell.

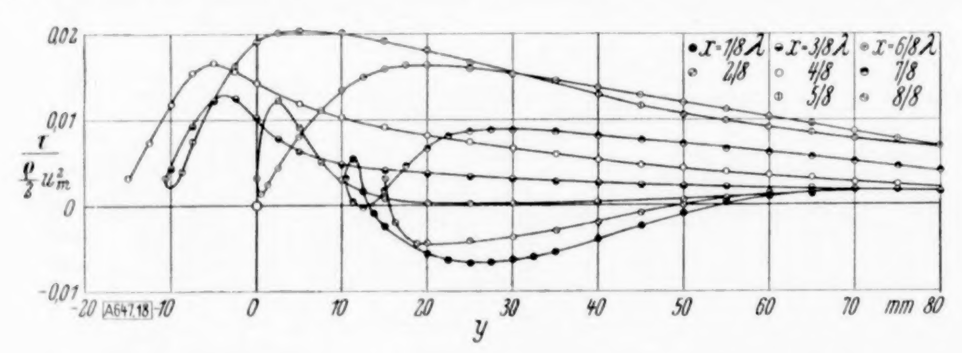


Abb. 18. Verteilung der scheinbaren Schubspannung über dem zweiten Wellenmodell.

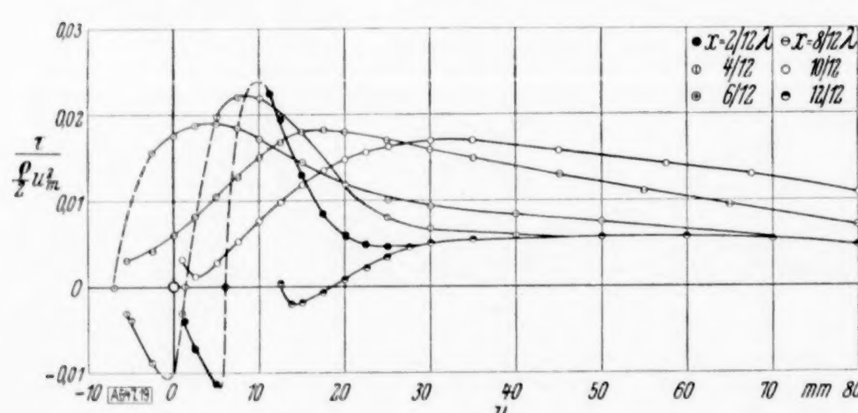


Abb. 19. Verteilung der scheinbaren Schubspannung über dem vierten Wellenmodell.

4. Vergleich der Ergebnisse mit denen der turbulenten Strömung an ebener Wand. a) Potenzgesetze. Auf den Geraden $y = \text{const}$ nimmt die Geschwindigkeit beim Fortschreiten in der x-Richtung verschiedene Werte an. Erst für größere y behält sie ihren Wert bei. Im folgenden sei nun unter $\bar{u}$ der mittlere Wert der Geschwindigkeit auf den Geraden $y = \text{const}$ verstanden. Es läßt sich dann diese Geschwindigkeitsverteilung über den vier Modellen durch folgende Potenzen von y wiedergeben:

Modell	I	II	III	IV
n	1/9	1/6,5	1/2*) 1/6,5	1/2,5

*) in Wandnähe.

Für Reynoldssche Zahlen $\frac{\bar{u} \cdot r}{\nu} \leq 50000$ fand Blasius[13]) für die turbulente Strömung im glatten Rohr, daß u proportional zu der 1/7 Potenz des Wandabstandes ist. In Abb. 20 sind die dimensionslosen Geschwindigkeiten $\bar{u}/u_m$ über y/δ aufgetragen (hierin bedeutet δ den Wert von y, für den $\bar{u}$ sein Maximum annimmt), dazu die von G. Wüst[14]) 1920 über der Ostsee gemessenen.

b) Logarithmisches Gesetz[15]). Nach den theoretischen Überlegungen von Prandtl und von v. Kármán ist es möglich, die turbulente Geschwindigkeitsverteilung an ebenen Wänden wiederzugeben durch den Ausdruck

$$\frac{u}{v_*} = \frac{2,3}{\varkappa}(\log y + C), \qquad \text{worin} \qquad v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}$$

die Schubspannungsgeschwindigkeit und $\varkappa$ ein universeller Zahlenwert bedeuten. Die Integrationskonstante C ist noch von der Beschaffenheit der Wand und der Reynoldsschen Zahl abhängig.

Aus den Rohrmessungen von Nikuradse[16]) ergab sich für $\varkappa = 0,4$ und $C = C_r = \log \frac{30}{k}$ für das rauhe Rohr, wenn k die Korngröße der Rauhigkeit ist und $C = C_g = \log \frac{9\, v_*}{\nu}$ für das glatte Rohr, worin ν die kinematische Zähigkeit bedeutet.

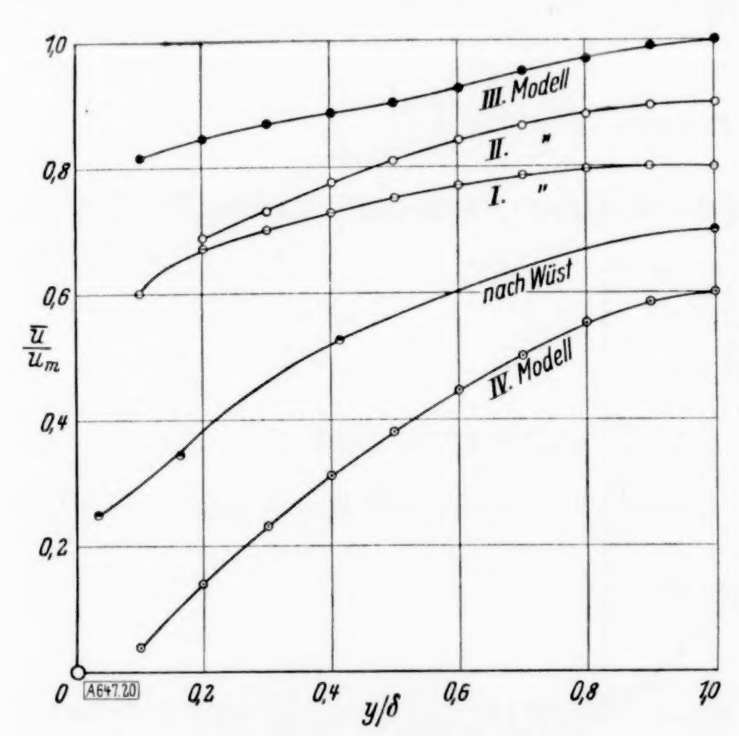


Abb. 20. Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung. (Die Kurven sind jeweilig um 0,1 nach unten verschoben.)

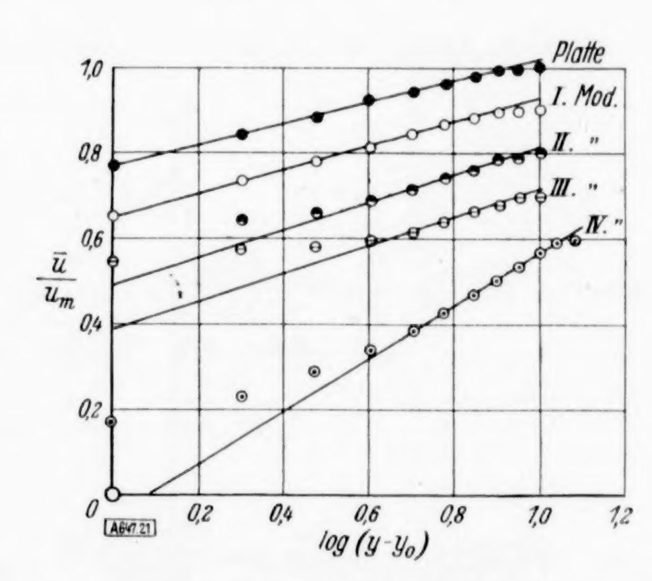


Abb. 21. Dimensionslose Geschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Logarithmus des Wandabstandes. (Die Kurven sind jeweilig um 0,1 nach unten verschoben.)

Aus unseren Messungen an der ebenen Kanalwand (siehe Tabelle 2), die wohl nicht vollkommen glatt angenommen werden darf, ergibt sich ein etwas anderer Wert. Es ist

$$C_g = \log \frac{3\, v_*}{\nu}.$$

Bei rauher Wand bleibt die Frage noch offen, wo der Ursprung der y-Achse zwischen den „Höckern der Rauhigkeit" genau zu liegen hat. In Abb. 21 sind die dimensionslosen Geschwindigkeiten $\frac{\bar{u}}{u_m}$ über $\log(y - y_0)$ aufgetragen, wobei y_0 so gewählt wurde, daß die Gerade, die sich durch die wandfernen Punkte legen läßt, eine Richtungskonstante

$$m = 5,75\,\frac{v_*}{u_m}$$

hat, so daß

$$c = \frac{\tau}{\frac{\varrho\, u_m^2}{2}} = 2\left(\frac{v_*}{u_m}\right)^2 = 2\left(\frac{m}{5,75}\right)^2$$

gleich den in Tabelle 1 angegebenen Werten wird.

[13]) H. Blasius: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. Phys. Z. Bd. 12, 1911 oder Forsch.-Arb. Ing.-Wes. H. 131.
[14]) G. Wüst: Verdunstung auf dem Meer. Veröff. Inst. Meereskunde. N. F. A. 6, Berlin 1920.
[15]) Siehe Fußnote S. 193.
[16]) Siehe Fußnote S. 193.

Man erkennt, daß in Nähe der Wand das logarithmische Gesetz nicht mehr gilt, und zwar sind die Abweichungen um so bedeutender, je größer das Maximum von $\frac{d\eta}{dx}$ bei den einzelnen Modellen ist.

Für das vierte Wellenmodell, welches wir als rauhe Wand auffassen können, liegt der Punkt $y - y_0 = \bar{y} = 0$ um $\frac{2}{3} a$ höher als der Wellenkamm. Nehmen wir diesen Punkt als Ursprung und setzen für $k = 2a$, so lautet die Integrationskonstante

$$C_r = \log \frac{7{,}25}{2a}.$$

Der Unterschied zu Nikuradse ist wohl darauf zurückzuführen, daß die Korngröße k nicht mit den wirklichen Höhenunterschieden ($2a$) identisch ist, da bei Nikuradse der aufgeklebte Sand noch mit Lack überzogen wurde. Weiter sind die Arten der Rauhigkeit wohl nicht miteinander zu vergleichen.

Bei der ersten Sinuswelle liegt der Ursprung $\bar{y} = 0$ um $Y = \frac{2a}{4}$, bei der zweiten um $Y = \frac{2a}{2}$, bei der Trochoidenwelle um $Y = \frac{10a}{8}$ höher als das Wellental. Trägt man Y über $\left[\frac{d\eta}{dx}\right]_{max}$ auf, so erkennt man, daß

$$Y = \frac{10a}{\pi} \left[\frac{d\eta}{dx}\right]_{max} = \frac{10a}{\pi} \operatorname{tg} \alpha_m \quad \text{oder nahezu} \quad Y = \pi a \left[\frac{d\eta}{dx}\right]_{max}$$

gesetzt werden kann, wenn α_m der größte Neigungswinkel der Tangenten an die Wellen ist.

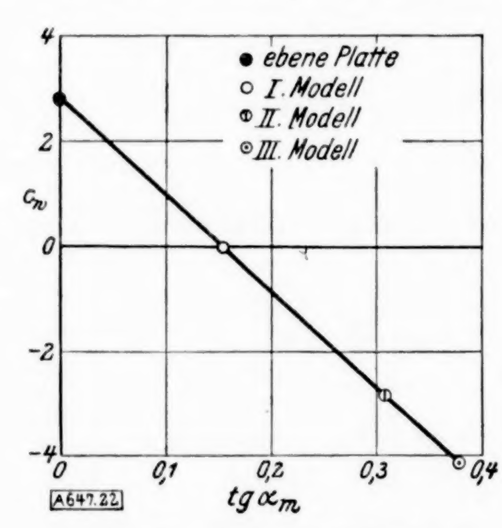


Abb. 22. Abhängigkeit der Integrationskonstante C_w von $\operatorname{tg} \alpha_m$.

Weiter zeigt sich, daß auch die Integrationskonstanten für wellige Wände C_w, die sich für die Wellen der 3 ersten Modelle ergeben, linear von $\operatorname{tg} \alpha_m$ abhängen (Abb. 22), und zwar ergibt sich

$$C_w = \log \frac{3 v_*}{\nu} - 18{,}2 \operatorname{tg} \alpha_m.$$

In genügender Entfernung von der Wand lassen sich also die Geschwindigkeitsprofile wiedergeben durch die Ausdrücke

$$\bar{u} = 5{,}75\, v_* \log \frac{7{,}5\, \bar{y}}{2a}$$

für scharfkämmige Wellen, wobei die Frage nach dem Nullpunkt von $\bar{y}$ noch offen bleibt und

$$\bar{u} = 5{,}75\, v_* \log \frac{3\, \bar{y}\, v_*}{\nu} - 18{,}2 \operatorname{tg} \alpha_m$$

für Wellen, bei denen keine Ablösung des Windes eintritt.

Aus diesen beiden Formeln findet man nun leicht Ausdrücke für die mittlere Wandschubspannung. Da $\tau = \varrho v_*^2$ ist, ergibt sich für scharfkämmige Wellen

$$\tau = \frac{\varrho\, \bar{u}_l^2}{33 \left(\log \frac{7{,}5 \cdot l}{2a}\right)^2},$$

wenn $\bar{u}_l$ die Geschwindigkeit im Abstand $\bar{y} = l$ ist und für flache Wellen

$$\tau = \frac{\varrho\, \bar{u}_l^2}{\left(5{,}75 \log\left(3\,\frac{l\sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}}{\nu}\right) - 18{,}2 \operatorname{tg} \alpha_m\right)^2},$$

woraus sich τ durch Iteration ermitteln läßt.

5. Anwendung der Meßergebnisse auf das Problem der Entstehung und des Anwachsens von Wasserwellen bei Wind[17]. Die Frage nach dem Anfachen von Wasserwellen durch den über die Wasseroberfläche streichenden Wind wurde zuerst von Lord Kelvin[18]) unter der Annahme reibungsfreier Flüssigkeiten und unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung behandelt.

Setzt man für die Stromfunktion im Wasser

$$\Phi' = u'_m\, x + e^{\varkappa y}\, \varphi_1(x) + e^{-\varkappa y} \varphi_2(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

dann verlangt die Kontinuitätsbedingung

$$\Delta\, \Phi' = 0,$$

daß

$$\varphi_1 = C_1(t)\, e^{i \varkappa x} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 = C_2(t)\, e^{i \varkappa x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist.

Für ein Teilchen der Oberfläche ergibt sich aus Gl. (1) eine Geschwindigkeit in der y-Richtung

$$v_{y=0} = \left[\frac{\partial\, \Phi'}{\partial\, y}\right]_{y=0} = \varkappa\, (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Weiter gilt für ein Teilchen an der Oberfläche $v_{y=0} = \frac{D\,\eta}{d\,t}$ (worin D die substantielle Differentiation ausdrücken soll), was sich auch angenähert schreiben läßt

$$v_{y=0} = \frac{\partial\, \eta}{\partial\, t} + u'_m \frac{\partial\, \eta}{\partial\, x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

wenn wir das Glied $v' \frac{\partial\, \eta}{\partial\, y}$ vernachlässigen und für u' die Strömungsgeschwindigkeit u'_m setzen.

Hat das Wasser an der Stelle $y = -h$ eine feste Begrenzung, so gilt hier $v_{y=h} = 0$ und somit

$$e^{-\varkappa h}\, \varphi_1 - e^{\varkappa h}\, \varphi_2 = 0\,.$$

Diese Beziehung liefert im Hinblick auf (2)

$$C_2 = C_1 \cdot e^{-2 \varkappa h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Nun läßt sich die Potentialfunktion unter Verwendung der Gl. (3) bis (5) durch die Oberflächenform $\eta\,(x, t)$ ausdrücken, und zwar ist

$$\Phi' = u'_m\, x + \frac{\cosh \varkappa\, (y + h)}{\sinh \varkappa\, h} \left[\frac{\partial\, \eta}{\partial\, t} + u'_m \frac{\partial\, \eta}{\partial\, x}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Wegen der Kontinuitätsbedingung muß darin $\eta = H(t)\, e^{-\varkappa x}$ gesetzt werden.

Entsprechend ergibt sich für das Potential der Luftbewegung, wenn wir uns die Luft über dem Wasserspiegel bis ins Unendliche erstreckt denken:

$$\Phi = u_m\, x - \frac{e^{-\varkappa y}}{\varkappa} \left[\frac{\partial\, \eta}{\partial\, t} + u_m \frac{\partial\, \eta}{\partial\, x}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

---

[17]) H. Thorade: Probleme der Wasserwellen. Hamburg 1931, S. 37 bis 54.
[18]) W. Thomson: Hydrokinetic Solutions and Observations. Phil. Mag. 4, 1871.

Nach Bernoulli folgt aus (6), bei Beschränkung auf lineare Glieder für den Druck an der Trennungsfläche

$$\frac{p'}{\varrho'} = \text{const} - \operatorname{ctgh} \varkappa h \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} + 2 u'_m \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x \partial t} + u'^2_m \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} \right) + g\,\eta(x,t) \right\} \quad . \quad (8)$$

und aus (7)

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} + \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} + 2 u_m \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x \partial t} + u_m \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} \right) - g\,\eta(x,t) \right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

oder, wenn wir $\eta = H(t)\, e^{-i\varkappa x}$ einführen,

$$\frac{p'}{\varrho'} = \text{const} - \operatorname{ctgh} \varkappa h \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{d^2 H(t)}{d t^2} - 2 u'_m i \varkappa \frac{d H(t)}{d t} - \varkappa^2 u'^2_m H(t) \right) + g\,H(t) \right\} e^{-i\varkappa x} \quad . \quad (10),$$

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} + \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{d^2 H(t)}{d t^2} - 2 u_m \varkappa i \frac{d H(t)}{d t} - \varkappa^2 u_m^2 H(t) \right) - g\,H(t) \right\} e^{-i\varkappa x} \quad \ldots . \quad (11).$$

Der Druckunterschied, hervorgerufen durch die Oberflächenspannung T, läßt sich angenähert ausdrücken durch

$$p - p' = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \qquad \text{oder} \qquad p - p' = -T \varkappa^2 H(t)\, e^{-i\varkappa x}$$

und es ergibt sich für $H(t)$ die Differentialgleichung, wenn wir noch durch $e^{-i\varkappa x}$ kürzen:

$$\left.\begin{aligned} &(\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) \frac{d^2 H}{d t^2} - 2 i \varkappa (u_m \varrho + u'_m \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) \frac{d H}{d t} \\ &\quad - \varkappa^2 (\varrho u_m^2 + \varrho' u'^2_m \operatorname{ctgh} \varkappa h) H - \varkappa g (\varrho - \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) \\ &\quad = -\varkappa^3 T \cdot H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Als Lösung setzen wir an

$$H = a\, e^{i\varkappa\sigma t},$$

darin ist a die halbe Höhe und σ die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen, die jetzt die Form haben

$$\eta = a \cdot e^{i\varkappa(\sigma t - x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

und es ergibt sich als charakteristische Gleichung:

$$(\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) \varkappa^2 \sigma^2 - 2 (u_m \varrho + u'_m \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) \varkappa^2 \sigma + \varkappa^2 (\varrho u_m^2 + \varrho' u'^2_m \operatorname{ctgh} \varkappa h) + \varkappa g (\varrho - \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h) = \varkappa^3 T.$$

Nach der Auflösung nach σ folgt daraus für die Phasengeschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \sigma = {} & \frac{u_m \varrho + u'_m \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h}{\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} \\ & \pm \left\{ -\frac{g}{\varkappa} \frac{\varrho - \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h}{\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} + \frac{T \varkappa}{\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} - \frac{\varrho \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h}{(\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h)^2} (u_m - u'_m)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14).$$

Die Trennungsfläche ist instabil, wenn

$$(u_m - u'_m)^2 \geq \frac{g}{\varkappa} \frac{\varrho'^2 \operatorname{ctgh}^2 (\varkappa h) - \varrho^2}{\varrho \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} + \frac{\varrho + \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h}{\varrho \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} \varkappa T \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

ist. Um zu der kleinsten Windgeschwindigkeit zu kommen, die noch Wellen zu erzeugen vermag, fragen wir nach dem Minimum der rechten Seite dieser Ungleichung. Ein solches tritt ein, wenn

$$\varkappa = \varkappa_0 = \left(g \frac{\varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h - \varrho}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

ist und dann gilt

$$(u_{0m} - u'_m) \geq 2 \frac{\varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h + \varrho}{\varrho \varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h} \left[T g (\varrho' \operatorname{ctgh} \varkappa h - \varrho) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Für tiefes Wasser liefert diese Formel für die minimale Windstärke $u_{0m} - u'_m = 640$ cm/sec und für die Länge der ersten Wellen 1,8 cm. Dieses Ergebnis steht aber zu den Beobachtungen (s. unten) im Widerspruch.

Einen anderen Weg zur Bestimmung der kritischen Windgeschwindigkeit beschreitet Jeffreys[19]). Er geht von der Tatsache aus, daß der Wind, da die Luft nicht reibungsfrei ist, auf der Luv- und Leeseite der Welle eine verschiedene Druckverteilung hervorruft, wodurch der Welle, wie gleich gezeigt werden soll, aus dem Wind ständig Energie zugeführt wird. Ein Anwachsen der Wellen tritt nun ein, wenn diese zugeführte Energie größer ist als die durch Reibung im Wasser verzehrte.

Wir wollen annehmen, daß das Wasser am Boden $y = -h$ in Ruhe ist, d. h., daß $u'_m = 0$ ist. Dann lautet Gl. (6)

$$\Phi' = \frac{1}{\varkappa} \frac{\cosh \varkappa (y + h)}{\sinh \varkappa h} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

oder mit $\eta = a \cos \varkappa (\sigma t - x)$ (vgl. Gl. (13))

$$\Phi' = \sigma \frac{\cosh \varkappa (y + h)}{\sinh \varkappa h} a \sin \varkappa (\sigma t - x) \quad \ldots \ldots \ldots (18a).$$

Die durch innere Reibung in der Zeiteinheit im Wasser verzehrte Energie berechnet sich nach Lamb[20]) aus

$$D = \mu' \int\int \frac{\partial (w^2)}{\partial n} d F,$$

worin μ' die Zähigkeit des Wassers bedeutet und

$$w^2 = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2$$

ist. Betrachten wir ein Volumen Wasser, welches sich senkrecht unter einem Stück der Oberfläche von der Breite b und der Länge λ befindet und bis zum Boden reicht, so ist hierin die Dissipation

$$D = 2 \mu' a^2 \sigma^2 \varkappa^3 \lambda b \operatorname{ctgh} \varkappa h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

Für den Teil der Druckverteilung an der Oberfläche, der für seine Rechnung von Bedeutung ist, setzt Jeffreys an

$$p^* = s \varrho (u_m - \sigma)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20).$$

Die von diesem Druck in der Zeiteinheit geleistete Arbeit für ein Oberflächenstück der Breite b und der Länge λ ist dann, da die Geschwindigkeit eines Oberflächenteilchens in der y-Richtung gleich $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ist und $d s \sin a = d x$ gesetzt werden kann, worin $d s$ ein Längenelement der Oberfläche und a der Neigungswinkel desselben gegen die x-Richtung ist:

$$Q = s \varrho (u_m - \sigma)^2 b \int_0^\lambda \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} d x$$

$$Q = s \varrho (u_m - \sigma)^2 a^2 \varkappa^2 \sigma b \int_0^\lambda \sin^2 \varkappa (\sigma t - x) \, d x$$

$$Q = s \varrho (u_m - \sigma)^2 \varkappa^2 a^2 \sigma \cdot b \cdot \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21).$$

[19]) H. Jeffreys: On the Formation of Water Waves by Wind. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 107 und Ser. A. 110, 1925/26.

[20]) H. Lamb: Hydrodynamics, § 317.

Aus Gl. (19) und (21) ergibt sich nun nach einer kleinen Umformung für die Anfachung von Wellen die Bedingung, wenn wir noch durch $b \cdot \lambda$ kürzen und $\frac{\mu'}{\varrho'} = \nu'$ einführen

$$\frac{(u_m - \sigma)}{\sigma} \geq \frac{4 \nu' \varrho'}{s \varrho} \varkappa \operatorname{ctgh} \varkappa h \qquad (22).$$

Vernachlässigen wir in Gl. (14) die Oberflächenspannung gegenüber der Schwere, was wir können, sobald $\lambda > 8$ cm bzw. $\varkappa < 0{,}8 \frac{1}{\text{cm}}$ ist, und beschränken wir uns auf kleine Windgeschwindigkeiten, dann erhalten wir für die Phasengeschwindigkeit, da $u'_m = 0$ angenommen wurde,

$$\sigma = \left(\frac{g}{\varkappa} \frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (23).$$

Unter Verwendung dieses Ausdruckes läßt sich (22) dann schreiben

$$(u_m - \sigma)^2 \cdot \sigma \geq 4 \frac{\nu' g}{s} \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho} \operatorname{ctgh} \varkappa h \qquad (24).$$

Um zu der Windstärke zu gelangen, die gerade noch Wellen zu erzeugen vermag, suchen wir das Maximum der linken Seite dieser Ungleichung. Es tritt ein, wenn $\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{3} u_{0m}$ ist, und es gilt für diesen Fall

$$u_{0m}^3 \geq 27 \frac{\nu' g}{s} \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho} \operatorname{ctgh} \varkappa h \qquad (25).$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (23) folgt hieraus

$$\varkappa_0^3 = s^2 \frac{g}{\nu'^2} \frac{\varrho^2}{\varrho'^2} \frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho} \operatorname{tgh}^2 \varkappa h \qquad (26).$$

Eine genaue Nachprüfung dieser Formeln war bisher nicht möglich, da der Faktor s nicht bekannt war. Jeffreys ermittelte umgekehrt aus Beobachtungen der ersten winderzeugten Wellen, für die er eine Wellenlänge von 8 bis 10 cm bei einer Mindestwindstärke von 104 bis 110 cm/sec feststellte, sowohl aus (25) als auch aus (26) s zu 0,318 — 0,229 und sah hierin eine Bestätigung seiner Theorie. Gleichzeitig wird hierdurch die Vernachlässigung der Oberflächenspannung gerechtfertigt, so daß also die winderzeugten Wellen keine „Rippel" (Thomson), sondern Schwerewellen sind. Bei Laboratoriumsversuchen von Stanton[21]) ergab sich dagegen $u_{0m} = 250$ cm/sec und $\lambda_0 = 6$ cm. Diese Werte liefern aus (25) $s = 0{,}025$ und aus (26) $s = 0{,}48$.

Berechnen wir nun den Druckwiderstand einer Welle $\eta = a \sin \varkappa x$ für die Breite Eins unter der von Jeffreys gemachten Annahme der Druckverteilung

$$p^* = s \varrho (u_m - \sigma)^2 \frac{d\eta}{dx},$$

so ist wegen $d\eta = \frac{d\eta}{dx} dx$

$$W_d = s \varrho (u_m - \sigma)^2 a^2 \varkappa^2 \int_0^\lambda \cos^2 \varkappa x \, dx$$

oder

$$W_d = s \varrho (u_m - \sigma)^2 a^2 \varkappa \qquad (27).$$

Für den Beiwert $c_d = \frac{W_d}{\frac{1}{2} \varrho (u_m - \sigma)^2 \lambda}$ folgt daraus

$$c_d = s a^2 \varkappa^2 \qquad (28).$$

---

[21]) s. Fußnote S. 197.

Setzen wir einen mittleren der von Jeffreys gefundenen Werte von s hierin ein, so erhalten wir als Widerstandsbeiwert für die Sinuswellen unserer beiden ersten Modelle $c_d = 0{,}0068$ und $c_d = 0{,}027$, also Werte, die um eine Zehnerpotenz größer sind als die gemessenen. Wir sehen also, daß die Jeffreysschen Ungleichungen (25) und (26) leider keine befriedigende Lösung des Problems darstellen.

Für die weitere Untersuchung wollen wir jetzt die kinetische Energie der Welle berechnen. Nach Lamb[22]) ergibt sich diese aus

$$E = \frac{1}{2}\varrho' \iint \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial n}\, d F,$$

worin n ein Element der äußeren Normalen der Kontrollfläche F ist. Betrachten wir als Kontrollfläche einen Quader, der senkrecht unter einem Stück der Oberfläche von der Breite b und der Länge λ liegt und bis zum Boden reicht, so ist das Integral nur über das Stück der Oberfläche zu erstrecken, da sich die Beiträge der Seitenwände des Quaders herausheben und am Boden $\frac{\partial \Phi'}{\partial n} = 0$ ist. Es ergibt sich also für die kinetische Energie, wenn wir Φ' aus Gl. (18a) einführen,

$$E = \frac{1}{4}\varrho' a^2 \sigma^2 \varkappa\, b \cdot \lambda \operatorname{ctgh} \varkappa h .$$

Da wie bei allen Schwingungen die potentielle Energie gleich der kinetischen ist, so ist die totale Energie

$$A = \frac{1}{2}\varrho' a^2 \sigma^2 \varkappa\, b \cdot \lambda \operatorname{ctgh} \varkappa h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29).$$

Die von dem Wind der Welle zugeführte Energie ergibt sich aus dem Produkt von Kraft mal Weg. Für die Zeiteinheit und einem Stück der Oberfläche der Breite b und der Länge λ lautet dies

$$\left.\begin{aligned} Q &= c_d \cdot \frac{1}{2}\varrho (u_m - \sigma)^2 \sigma \cdot b \cdot \lambda \quad \text{für} \quad u_m \geq \sigma \\ Q &= -c_d \cdot \frac{1}{2}\varrho (u_m - \sigma)^2 \sigma \cdot b \cdot \lambda \quad \text{für} \quad u_m < \sigma \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (30).$$

Für die weitere Rechnung wollen wir uns auf den Bereich $u_m \geq \sigma$ beschränken, da wegen des Energieentzugs für $u_m < \sigma$ stets eine Dämpfung der Wellen eintritt.

Der Widerstandsbeiwert c_d ist nun, wie unsere Versuche gezeigt haben (Tabelle 1), noch von dem Verhältnis $\frac{a}{\lambda}$ abhängig. Da sich diese Abhängigkeit nur empirisch ermitteln läßt, wollen wir angenähert setzen

$$c_d = s \cdot a^n \varkappa^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31),$$

worin der Proportionalitätsfaktor s und der Exponent n noch aus unseren Messungen zu ermittelnde Größen sind.

Wegen der Erhaltung der Energie muß nun die zeitliche Änderung der totalen Energie gleich der Differenz aus der zugeführten und der verzehrten Energie sein. Dies führt zu der Gleichung

$$\varrho' \varkappa \sigma^2 a \frac{d a}{d t} = s \varkappa^n a^n \frac{1}{2}\varrho (u_m - \sigma)^2 \cdot \sigma \operatorname{tgh} \varkappa h - 2 \mu' a^2 \varkappa^3 \sigma^2 \quad \ldots \ldots (32),$$

wenn wir nur a mit der Zeit veränderlich annehmen und durch $b \cdot \lambda$ kürzen.

---

[22]) Lamb: Hydrodynamics, § 44.

Als erste Lösung dieser Gleichung erhalten wir $a = 0$. Für $a \neq 0$ können wir (32) auch schreiben

$$\frac{da}{dt} = C_1 a^{n-1} - C_2 a ,$$

wenn wir für

$$\frac{1}{2} s \frac{\varrho}{\varrho'} \varkappa^{n-1} \frac{(u_m - \sigma)^2}{\sigma} \operatorname{tgh} \varkappa h = C_1 \quad \text{und für} \quad 2 \nu' \varkappa^2 = C_2$$

setzen. Die zweite Lösung lautet dann

$$\int \frac{a^{1-n} da}{C_1 - a^{2-n} C_2} = t + \text{const}$$

oder, nach Durchführung der Integration und wenn für $t = 0$ $a = a_0$ sein soll,

$$(n-2) C_2 \cdot t = \ln \frac{C_1 a^{n-2} - C_2}{C_1 a_0^{n-2} - C_2} - (n-2) \ln \frac{a}{a_0} \quad \ldots \ldots \ldots (33).$$

Für den Grenzfall $n = 2$ geht diese Gleichung über in

$$t = \frac{1}{C_1 - C_2} \ln \frac{a}{a_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (34)$$

und für den Grenzfall verschwindender Wasserzähigkeit, d. h. für $C_2 = 0$ aber $n \neq 2$ in

$$(2-n) C_1 t = a^{2-n} - a_0^{2-n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (35).$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß bei verschwindender Wasserzähigkeit die Oberflächenwellen angefacht werden, wenn $u_m > \sigma$ ist. Aus Gl. (33) ergibt sich für die Anfachung die Bedingung für $0 \leq \sigma \leq u_m$.

$$C_1 a^{n-2} \geq C_2 .$$

Daraus folgt

1. für $n < 2$

$$\left(\frac{s}{4} \frac{\varrho (u_m - \sigma)^2}{\varrho' \varkappa \nu' \sigma} \operatorname{tgh} \varkappa h\right)^{\frac{1}{2-n}} \geq a \varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

und

2. für $n > 2$

$$\left(\frac{s}{4} \frac{\varrho (u_m - \sigma)^2}{\varrho' \varkappa \nu' \sigma} \operatorname{tgh} \varkappa h\right)^{-\frac{1}{n-2}} \leq a \varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37).$$

Die erste dieser beiden Ungleichungen besagt, daß die Wellen dann angefacht sind, wenn das Verhältnis von Amplitude zur Wellenlänge $\left(\frac{a}{\lambda} = \frac{a \varkappa}{2 \pi}\right)$ unter einer von der jeweiligen Windstärke abhängigen Grenze liegt, oder anders ausgedrückt, zu jeder Windstärke und zu jeder Wellenlänge gibt es eine bestimmte stationäre Amplitude. Dagegen folgt aus der zweiten Ungleichung, daß der Wind nur dann die Wellen anzufachen vermag, wenn ihr Verhältnis von Amplitude zur Wellenlänge schon einen gewissen von der jeweiligen Windstärke abhängigen Wert überschritten hat.

Aus Gl. (34) folgt schließlich die Instabilitätsbedingung

3. für $n = 2$

$$C_1 > C_2 ,$$

was natürlich zu den Jeffreysschen Ungleichungen (25) und (26) führt, da unter der Jeffreysschen Annahme der Druckverteilung, wie Gl. (28) zeigt, der Exponent n sich zu 2 ergibt.

Zur Bestimmung von n und s wollen wir nun unsere Ergebnisse der Druckwiderstandsmessungen am ersten $\left(\frac{a}{\lambda} = 0{,}025\right)$ und zweiten $\left(\frac{a}{\lambda} = 0{,}05\right)$ Modell zugrunde legen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die sich ergebenden Werte nicht sehr genau sein können, da zu ihrer Bestimmung eine größere Anzahl von Wellenformen untersucht sein müßte. Aus den zugehörigen Beiwerten $c_d = 0{,}00085$ bzw. $c_d = 0{,}0024$ ergibt sich n zu 1,5 und s zu 0,014 und es gilt somit die Instabilitätsbedingung (26). Nach Einführung obiger Werte lautet diese

$$\left(0{,}0035 \frac{\varrho}{\varrho' \nu'} \frac{1}{\varkappa} \frac{(u_m - \sigma)^2}{\sigma} \operatorname{tgh} \varkappa h\right)^2 \geq a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Bei vorgegebener Windstärke gehört also zu jeder Wellenlänge eine bestimmte stationäre Wellenlänge a_0. Für einige Windstärken wurde das Verhältnis von $\frac{a_0}{\lambda} = \frac{a_0^{0} \varkappa}{2\pi}$ berechnet. Die Werte sind in der Abb. 23 über der Wellenlänge aufgetragen. Die Kurven zeigen, daß es

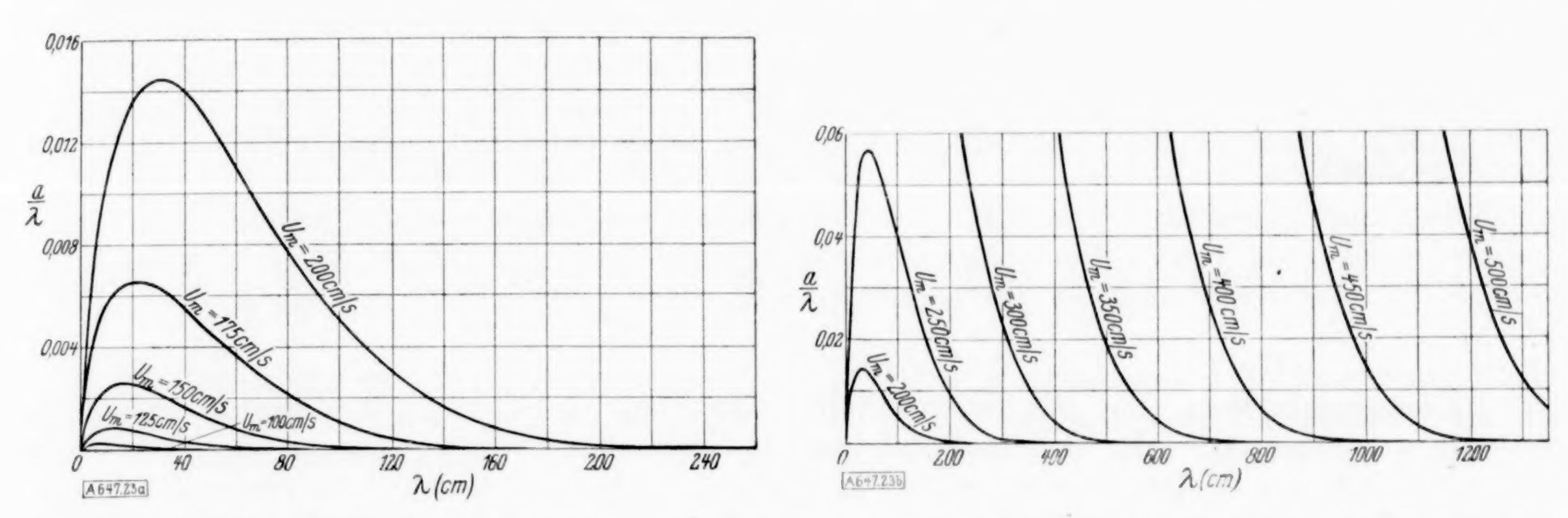


Abb. 23a und 23b. Abhängigkeit der stationären Amplitude von der Wellenlänge bei verschiedenen Windstärken.

bei jeder Windstärke ein Maximum von $\frac{a_0}{\lambda}$ gibt. Um dieses zu bestimmen, führen wir σ aus (23) in (38) ein

$$\left(0{,}0035 \frac{\varrho \operatorname{tgh} \varkappa h}{\varrho' \nu' g} \frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho} \sigma (u_m - \sigma)^2\right)^2 \geq a \varkappa \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Hierin wird die linke Seite ein Maximum, wenn $\sigma = \sigma_1 = \frac{1}{3} u_m$ wird, d. h. das Verhältnis $\frac{a_0}{\lambda}$ wird am größten für die Welle der Länge

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{9} \frac{u_m^2}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40).$$

Von allen geometrisch ähnlichen Wellen ist die mit der Länge λ_1 am stärksten angefacht. Um die Wellenlänge der Welle mit der größten Anfachung zu bekommen, wobei für alle Wellen die gleiche Amplitude vorausgesetzt wird, schreiben wir (39) folgendermaßen:

$$\left(0{,}0035 \frac{\varrho \operatorname{tgh} \varkappa h}{\varrho' \nu' g^{1,5}} \left(\frac{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) + \varrho}{\varrho' \operatorname{ctgh}(\varkappa h) - \varrho}\right)^{1,5} \sigma^2 (u_m - \sigma)^2\right)^2 \geq a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41).$$

Hierin wird die linke Seite ein Maximum, wenn $\sigma = \sigma_2 = \frac{1}{2} u_m$ wird. Es wird also in diesem Fall die Welle der Länge

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2} \frac{u_m^2}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

am stärksten angefacht.

Für tiefes Wasser ergibt sich bei einer Windstärke von 104 cm/sec für λ_1 7,7 cm und für λ_2 17,3 cm. Bei einer Windstärke von 250 cm/sec ist $\lambda_1 = 44{,}5$ cm und $\lambda_2 = 100$ cm.

Zum Schluß wollen wir noch die gefundenen Werte von n und s in (33) einführen. Es ergibt sich dann für die Zeit des Anwachsens der Wellen

$$t = \frac{1}{\nu' \varkappa^2} \ln \left(\frac{0{,}0035 \frac{\varrho \operatorname{tgh}(\varkappa h)}{\varrho' \nu' \varkappa} \frac{(u_m - \sigma)^2}{\sigma} (a_0 \varkappa)^{-\frac{1}{2}} - 1}{0{,}0035 \frac{\varrho \operatorname{tgh} \varkappa h}{\varrho' \nu' \varkappa} \frac{(u_m - \sigma)^2}{\sigma} (a \varkappa)^{-\frac{1}{2}} - 1} \right) - \frac{0{,}5}{\nu' \varkappa^2} \ln \frac{a}{a_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

In Tabelle 3 sind einige Zeiten angegeben, die die Wellen benötigen, um von $\frac{a_1}{\lambda} = 0{,}015$ auf $\frac{a_2}{\lambda} = 0{,}03$ anzuwachsen.

Tabelle 3.

$u_m = 250$ cm/sec						
λ	25	50	75	100	cm	
t	0,17	0,555	1,56	4,15	Std.	
$u_m = 500$ cm/sec						
λ	200	400	600	800	1000	cm
t	0,465	2,17	7,09	20	66	Std.

Zusammenfassung. Es ist die turbulente Strömung längs welligen Wänden untersucht worden und zwar wurde der Druckverlauf und die Geschwindigkeitsverteilung an vier Wänden mit verschiedenen Wellenformen bestimmt. Aus den Messungen wurde sowohl der Druck- als auch der Reibungswiderstand der Wände bestimmt, weiter das Stromlinienbild und die Verteilung der Schubspannung. Ein Vergleich der Ergebnisse mit denen der turbulenten Strömung an glatten und rauhen Wänden ergab, daß in Wandnähe die Geschwindigkeitsverteilung dem logarithmischen Gesetz nicht mehr gehorcht. In größerer Entfernung von der Wand ließen sie sich jedoch wiedergeben durch die Ausdrücke

$$\bar{u} = 5{,}75\, v_* \log \frac{7{,}5\, \bar{y}}{2\, a}$$

für Wellen mit scharfen Kämmen und

$$\bar{u} = 5{,}75\, v_* \log \frac{3\, v_* \bar{y}}{\nu} - 18{,}2 \operatorname{tg} \alpha_m$$

für Wellen mit runden Kämmen.

Im zweiten Teil wurden die Ergebnisse der Druckwiderstandsmessungen auf die Frage nach dem Entstehen und dem Anwachsen von Wasserwellen bei Wind angewandt. Es ergab sich aus einer Energiebetrachtung, daß die ebene Wasseroberfläche für jede Windstärke instabil ist und daß es für jede Windstärke und jede Wellenlänge eine bestimmte maximale Amplitude gibt, die nicht überschritten werden kann. Für einige Windstärken wurde diese Amplitude berechnet. Es zeigte sich, daß dieselben bei Windstärken unter 100 cm/sec sehr klein sind. Die stärkste Anfachung von allen geometrisch ähnlichen Wellen hat die mit der Länge

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{9} \frac{u_m^2}{g}$$

und von Wellen mit der gleichen Amplitude die mit der Länge

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2} \frac{u_m^2}{g}.$$

Zum Schluß wurden noch die Anwachszeiten für einige Wellen verschiedener Wellenlänge bei zwei verschiedenen Windstärken berechnet.

Ein elektrisches Gerät zum Lösen von Systemen linearer Gleichungen.

Von *Helmuth Bode VDE*, Berlin.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Laboratorium der Technischen Hochschule Berlin.)

An vielen Stellen der Technik besteht die Notwendigkeit, Systeme von linearen Gleichungen mit einer größeren Anzahl von Unbekannten zu lösen. Es wurde ein Gerät gebaut, das die Abbildung und Lösung von symmetrischen, linearen Gleichungssystemen durch ein elektrisches Netzwerk in einfacher Weise und mit beliebig hoher Genauigkeit gestattet.

1. Bekannte Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten bereitet mathematisch keine Schwierigkeiten; sie erfordert jedoch, besonders wenn es sich um eine größere Anzahl von Gleichungen und Unbekannten handelt, eine umfangreiche und zeitraubende Rechenarbeit. Auch bei Benutzung der bekannten Näherungsmethoden[1]) gestaltet sich die Auflösung noch außerordentlich umständlich; um die Näherungsverfahren anwenden zu können, sind häufig noch Umformungen der Gleichungen erforderlich. Es sind daher zahlreiche Versuche gemacht worden, lineare Gleichungssysteme maschinell zu lösen. Der erste Versuch scheint von Lord Kelvin zu stammen; er baute ein mechanisches Gerät, bestehend aus Waagebalken mit Rollen und darüberlaufenden Schnüren[2]). Die Zahl der Wagebalken und Schnüre ist gleich der Zahl der Gleichungen und Unbekannten. Eine Maschine von J. Nowak[3]) stellt ein zwangsläufiges Getriebe dar; Zahnradübersetzungen bilden die Gleichungskoeffizienten ab. Ganz ähnlich arbeitet ein Gerät von M. Nähbauer[4]). Ein hydraulischer Apparat wurde von K. Fuchs gebaut[5]).

Neuere Geräte und Vorschläge beschreibt W. Cauer in „Elektrische Nachrichtentechnik" 1935, Bd. 12, Heft 5*); es handelt sich dabei um elektrisch arbeitende Apparate, wie die Mallocksche Maschine, die Abbildung eines Fachwerks durch eine elektrische Schaltung, wobei der Bedingung der Statik, daß die Summe aller auf einen Knotenpunkt wirkenden Kräfte gleich 0 sein muß, die elektrische Bedingung, daß die Summe aller einem Knotenpunkt zufließenden Ströme 0 sein muß, entspricht, u. a.

Cauer selbst schlägt ein Gerät vor, mit dem sich nach einem Kompensationsverfahren die Elimination von Unbekannten elektrisch durchführen läßt; man erhält so ein gestaffeltes Gleichungssystem, dessen letzte Gleichung nur noch eine Unbekannte besitzt; damit ist das Gleichungssystem praktisch gelöst. Durch Verwendung von Schrittschaltwerken und Relais kann der Kompensationsvorgang weitgehend automatisiert werden.

Eine Umgehung der Auflösung linearer Gleichungssysteme bedeuten sog. Netzmodelle, durch die zu berechnende elektrische Leitungsnetze nachgebildet werden, und an denen dann durch Spannungs- und Strommessungen die erforderlichen Daten eines zu bauenden Netzes oder das Verhalten eines vorhandenen Netzes bei bestimmten Betriebsfällen ermittelt werden können. Es handelt sich dabei um die experimentelle Lösung der ursprünglichen Aufgabe bei geänderten Maßstäben.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Möglichkeit zu untersuchen, beliebige lineare Gleichungssysteme, auch solche, die nicht aus einem Netzproblem entstanden sind, durch Abbildung in ein Netzwerk zu lösen, und eine praktische Ausführungsform für ein auf dieser Grundlage arbeitendes Gerät zu finden.

2. Die Abbildung elektrischer Netzwerke durch lineare Gleichungssysteme. Die Berechnung eines Netzes von Ohmschen Widerständen führt auf ein System linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten; umgekehrt kann ein lineares Gleichungssystem unter gewissen Voraussetzungen in ein Netz von Ohmschen Widerständen abgebildet werden und durch Strom- und Spannungsmessungen gelöst werden. Die Aufstellung der Gleichungen eines Netzwerkes kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Stromgleichungen oder Spannungsgleichungen erfolgen, wobei der Ausgangspunkt der Berechnung einmal die Knotenpunkte, das andere Mal die Maschen des Netzwerkes sind; man benutzt die Stromgleichungen, wenn die Spannungen in den Knotenpunkten gesucht sind und die den Knotenpunkten zufließenden Ströme bekannt sind. Die Spannungsgleichungen werden verwendet, wenn die Maschenströme unbekannt sind und die an den einzelnen Maschen liegenden Spannungen gegeben sind. An zwei Beispielen soll der Unterschied zwischen diesen beiden Formen der Netzgleichungen gezeigt werden.

*) Bei Erscheinen der genannten Arbeit waren die hier beschriebenen Untersuchungen bereits abgeschlossen.

Zunächst seien für ein Netz mit 4 Knotenpunkten (Abb. 1), zwischen die die Leitwerte $g_{10}, g_{12}, g_{13}, \ldots$ geschaltet sind, und deren Spannungen gesucht sind, die Netzgleichungen aufgestellt.

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = g_{12} \cdot (u_1 - u_2) + g_{13} \cdot (u_1 - u_3) + g_{10} \cdot (u_1 - u_0) \\ i_2 = g_{21} \cdot (u_2 - u_1) + g_{23} \cdot (u_2 - u_3) + g_{20} \cdot (u_2 - u_0) \\ i_3 = g_{31} \cdot (u_3 - u_1) + g_{32} \cdot (u_3 - u_2) + g_{30} \cdot (u_3 - u_0) \\ i_0 = g_{01} \cdot (u_0 - u_1) + g_{02} \cdot (u_0 - u_2) + g_{03} \cdot (u_0 - u_3) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Durch Umformung erhält man hieraus:

$$\begin{array}{llllll} i_1 = (g_{12} + g_{13} + g_{10}) \cdot u_1 & - g_{12} \cdot u_2 & - g_{13} \cdot u_3 & - g_{10} \cdot u_0 \\ i_2 = \quad - g_{21} \cdot u_1 & + (g_{21} + g_{23} + g_{20}) \cdot u_2 & - g_{23} \cdot u_3 & - g_{20} \cdot u_0 \\ i_3 = \quad - g_{31} \cdot u_1 & - g_{32} \cdot u_2 & + (g_{31} + g_{32} + g_{30}) \cdot u_3 & - g_{30} \cdot u_0 \\ i_4 = \quad - g_{01} \cdot u_1 & - g_{02} \cdot u_2 & - g_{03} \cdot u_3 & + (g_{01} + g_{02} + g_{03}) \cdot u_0 . \end{array}$$

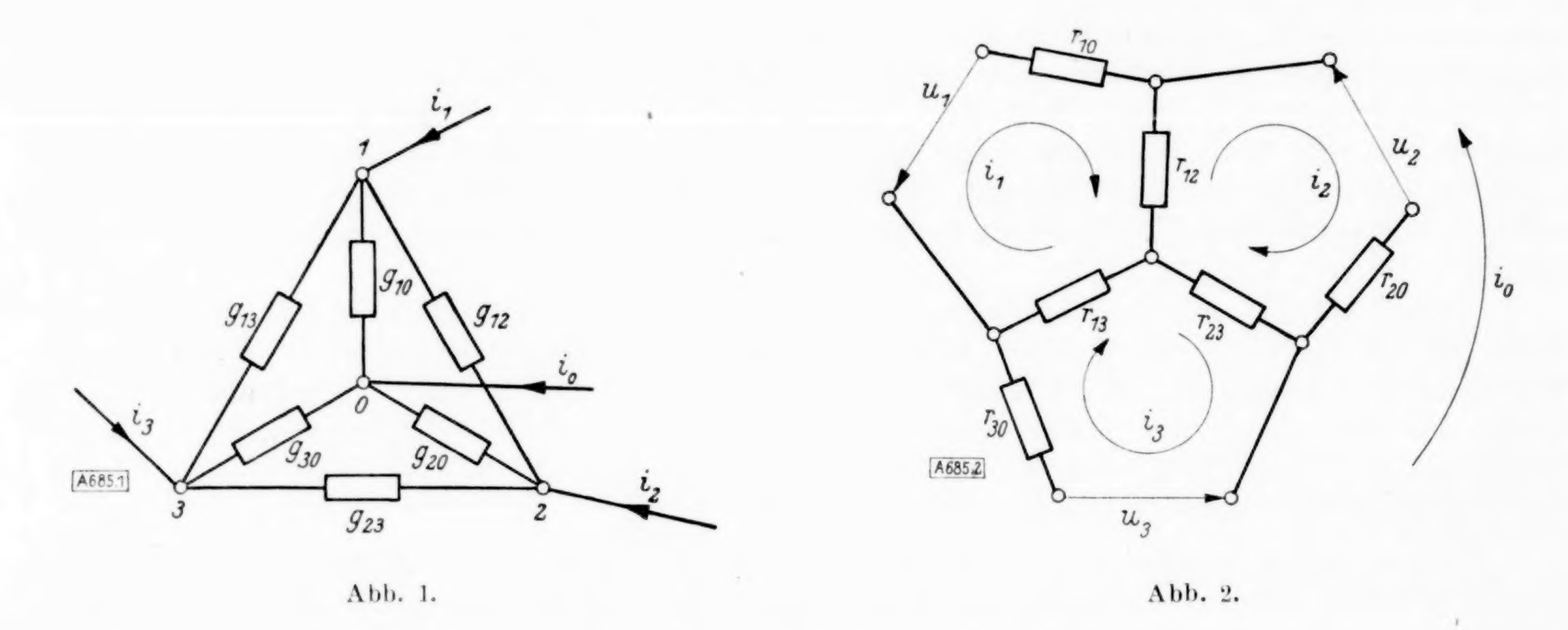


Abb. 1. Abb. 2.

In diesem Gleichungssystem ist eine Gleichung die Summe aller übrigen. Für die Ströme in den Zweigen des Netzes sind nämlich nicht die Spannungen in den Knotenpunkten selbst, sondern die Spannungsunterschiede zwischen den Knotenpunkten bestimmend. Die Spannung eines Knotenpunktes kann daher beliebig angenommen werden und eine Gleichung gestrichen werden. Man erhält dann ein System von 3 voneinander unabhängigen Gleichungen.

$$u_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{llll} i_1 = (g_{12} + g_{13} + g_{10}) \cdot u_1 & - g_{12} \cdot u_2 & - g_{13} \cdot u_3 \\ i_2 = \quad - g_{21} \cdot u_1 & + (g_{21} + g_{23} + g_{20}) \cdot u_2 & - g_{23} \cdot u_3 \\ i_3 = \quad - g_{31} \cdot u_1 & - g_{32} \cdot u_2 & + (g_{31} + g_{32} + g_{30}) \cdot u_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Entsprechend ergibt sich für das zu obigem Netzwerk duale Netz nach Abb. 2 mit den Widerständen $r_{10}, r_{12}, r_{13}, \ldots$ in den Maschen bei einer ähnlichen willkürlichen Annahme

$$i_0 = 0$$

zur Eliminierung der überzähligen 4. Gleichung:

$$\left.\begin{array}{llll} u_1 = (r_{12} + r_{13} + r_{10}) \cdot i_1 & - r_{12} \cdot i_2 & - r_{13} \cdot i_3 \\ u_2 = \quad - r_{21} \cdot i_1 & + (r_{21} + r_{23} + r_{20}) \cdot i_2 & - r_{23} \cdot i_3 \\ u_3 = \quad - r_{31} \cdot i_1 & - r_{32} \cdot i_2 & + (r_{31} + r_{32} + r_{30}) \cdot i_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Die Gleichungssysteme (2) und (3) bestehen beide aus 3 voneinander unabhängigen Gleichungen; sie stimmen in ihrem Aufbau vollkommen miteinander überein, da sie zu zwei zueinander dualen Netzwerken gehören; man erhält das eine Netzwerk aus dem anderen, wenn man Widerstände durch Leitwerte, Spannungen durch Ströme, Netzmaschen durch Netz-

knoten und umgekehrt ersetzt. Die beiden Netze haben 4 Knotenpunkte bzw. 4 Maschen und führen auf Gleichungssysteme mit 3 voneinander unabhängigen Gleichungen; in gleicher Weise führt die Berechnung von Netzwerken mit n Knotenpunkten oder Maschen auf Gleichungssysteme mit $(n-1)$ Gleichungen.

3. Die Abbildung linearer Gleichungssysteme durch elektrische Netzwerke. Um ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen elektrisch abzubilden, braucht man nach dem Vorhergehenden ein Netzwerk mit $(n+1)$ Knotenpunkten bzw. ein solches mit $(n+1)$ Maschen; im ersten Fall sind die Koeffizienten der Gleichungen durch Leitwerte und die absoluten Glieder durch Ströme, die in die Knotenpunkte hineingeschickt werden, darzustellen; die Unbekannten werden durch Spannungsmessungen zwischen den Knotenpunkten erhalten. Im zweiten Fall werden die Koeffizienten durch Widerstände und die absoluten Glieder durch Spannungen abgebildet; die Unbekannten erhält man durch Messung der Ströme in bestimmten Zweigen des Netzwerkes.

An dem Beispiel eines Gleichungssystems mit 3 linearen Gleichungen (4) werde nun gezeigt, unter welchen Bedingungen sich ein lineares Gleichungssystem durch ein Netzwerk aus Ohmschen Widerständen oder Leitwerten abbilden läßt.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 \\ y_2 &= a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 \\ y_3 &= a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Der Vergleich dieses Gleichungssystems mit den Systemen (2) und (3) ergibt die Ströme und Leitwerte bzw. die Spannungen und Widerstände des abbildenden Netzes; man erhält im ersten Fall:

$$i_1 = y_1 \qquad i_2 = y_2 \qquad i_3 = y_3$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (g_{12} + g_{13} + g_{10}) \qquad & a_{12} &= a_{21} = -g_{12} \\ a_{22} &= (g_{21} + g_{23} + g_{20}) \qquad & a_{23} &= a_{32} = -g_{23} \\ a_{33} &= (g_{31} + g_{32} + g_{30}) \qquad & a_{31} &= a_{13} = -g_{13}\,. \end{aligned}$$

Zwei Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Abbildung durch ein Netzwerk Ohmscher Widerstände möglich ist:

1. Da der Leitwert zwischen zwei Knotenpunkten unabhängig von der Stromrichtung ist, da also z. B. $g_{12} = g_{21}$ ist, muß auch für die Koeffizienten des abzubildenden Gleichungssystems die Bedingung erfüllt sein, daß $a_{ik} = a_{ki}$ ist; d. h. das abzubildende Gleichungssystem muß eine symmetrische Hauptdeterminante haben.

2. Da zur Abbildung nur positive Leitwerte bzw. Widerstände zur Verfügung stehen, müssen die Koeffizienten a_{12}, a_{13} und a_{23} negativ und die Koeffizienten a_{11}, a_{22} und a_{33} positiv sein; außerdem muß

$$\begin{aligned} a_{11} &\geqq |a_{12} + a_{13}| \\ a_{22} &\geqq |a_{21} + a_{23}| \\ a_{33} &\geqq |a_{31} + a_{32}| \end{aligned}$$

sein. Allgemein bestehen also die Bedingungen:

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad \underset{k \neq i}{a_{ik} < 0} \qquad a_{ii} > \Big|\sum_{k \neq i} a_{ik}\Big|\,.$$

Entsprechende Umrechnungsformeln und die gleichen Bedingungen gelten auch für die Abbildung mit Widerständen und Maschen; außerdem besteht aber bei dieser Art der Abbildung noch eine weitere Einschränkung. Die Indizes der Widerstände geben an, zwischen welchen Maschen diese als Kopplungsglieder liegen; sind bei einem Gleichungssystem alle Koeffizienten von 0 verschieden, so müssen bei dem abbildenden Netzwerk alle Maschen unmittelbar miteinander durch Widerstände gekoppelt sein. Nur 4 Maschen jedoch können praktisch unmittelbar miteinander gekoppelt sein, d. h. einander direkt benachbart sein (vgl. Abb. 2); bei einer größeren Anzahl von Maschen ist nur eine mittelbare Kopplung aller Maschen untereinander möglich. Die Abbildung eines Gleichungssystems mit mehr als

3 Gleichungen nach dieser zweiten Art erfordert also die Verwendung von Hilfsmaschen und eine komplizierte Berechnungsart für die Widerstände des abbildenden Netzwerkes; sie kommt aus diesem Grunde für den Zweck der Gleichungslösung nicht in Frage. Sie würde den weiteren Nachteil haben, daß für die Darstellung der absoluten Glieder der Gleichungen ebensoviel voneinander unabhängige Spannungsquellen nötig wären, wie das abzubildende Gleichungssystem Gleichungen hat.

Bei der ersten Art der Abbildung, bei der die Koeffizienten des Gleichungssystems durch Kopplungsleitwerte zwischen den Knotenpunkten dargestellt werden, besteht die vorstehende Einschränkung nicht, da es ohne Schwierigkeiten möglich ist, jeden Knotenpunkt mit jedem anderen durch einen Leitwert direkt zu koppeln; es können also Gleichungssysteme mit beliebig vielen Gleichungen und Unbekannten durch Netzwerke mit einer um 1 größeren Zahl von Knotenpunkten abgebildet werden, wenn sie die beiden vorher genannten Bedingungen erfüllen. Die in das Netzwerk zu schickenden Ströme können einer gemeinsamen Spannungsquelle entnommen werden. Die Unbekannten werden in einfacher Weise durch Messung der Spannungen zwischen dem $(n+1)$. Knotenpunkt einerseits und den übrigen n Knotenpunkten andererseits erhalten.

4. Erweiterung auf Koeffizienten beliebigen Vorzeichens. Die Zahl der Gleichungssysteme, die auf diese Art durch Abbildung in ein Netz von Ohmschen Leitwerten gelöst werden können, ist besonders durch die zweite Bedingung eingeschränkt, während die erste Bedingung, die Symmetrie der Hauptdeterminante fordert, bei den meisten in der Technik vorkommenden Gleichungssystemen erfüllt ist.

Um jedes symmetrische Gleichungsystem elektrisch abbilden und lösen zu können, müßte man für den Aufbau des Netzwerkes positive und negative Leitwerte zur Verfügung haben. Negative Leitwerte können durch Anordnungen von Elektronenröhren dargestellt werden; es ist sogar möglich, mit Hilfe von Röhren richtungsabhängige Leitwerte zu bauen, so daß auch die Bedingung der Symmetrie beseitigt werden könnte. Es ist jedoch sehr schwierig, derartige Leitwerte in einem großen Bereich veränderlich und einstellbar zu machen; ihre zeitliche Konstanz und ihre Linearität in weiten Bereichen ist wahrscheinlich ungenügend; außerdem erfordern sie die Verwendung von zahlreichen besonderen Spannungsquellen, die den Bau und den Betrieb eines solchen Geräts zu kompliziert machen würden.

Die vorstehenden Schwierigkeiten werden vermieden bei Betrieb des Gerätes mit Wechselstrom und Benutzung von Blindleitwerten; als positive Blindleitwerte werden Kapazitäten, als negative Blindleitwerte Induktivitäten verwendet. Mit einem solchen Netzwerk kann jedes symmetrische, lineare Gleichungssystem mit reellen oder auch komplexen Koeffizienten gleichen Phasenwinkels abgebildet werden. Ein für den praktischen Gebrauch geeignetes Gerät muß eine größere Anzahl kapazitiver (positiver) und induktiver (negativer) Leitwerte besitzen, die einem zu lösenden Gleichungssystem entsprechend zu einem Netz zusammengeschaltet werden können und in weiten Grenzen veränderlich sind. Die positiven und negativen Leitwerte sollen rein imaginär sein, damit sie die Voraussetzung ihrer Verwendbarkeit, entgegengesetztes Vorzeichen zu besitzen, erfüllen. Die in das abbildende Netzwerk hineinzuschickenden Ströme müssen gleichphasig sein, damit die von ihnen an den einzelnen Leitwerten hervorgerufenen Spannungen sich als Beträge addieren oder subtrahieren. Die Frequenz der zur Speisung des Netzwerkes verwendeten Spannungsquelle muß konstant sein, damit positive und negative Leitwerte eine feste Eichung in Leitwerteinheiten erhalten können. Die Messung der Spannungen im Netzwerk zur Ermittelung der Unbekannten muß mit verbrauchslosen Spannungsmessern erfolgen, damit durch ihre Einschaltung keine Änderung der Leitwerte des Netzes verursacht wird.

5. Die Ausführung der abbildenden Blindleitwerte. Als kapazitive Leitwerte sind Drehkondensatoren mit Luftdielektrikum besonders gut geeignet; sie sind in weiten Grenzen in ihrem Leitwert veränderlich und erhalten bei halbkreisförmigen Platten eine gleichmäßig geteilte Skala; sie erfüllen die Forderung, einen rein imaginären Leitwert zu besitzen, in sehr hohem Maße.

Als günstigste Lösung für die Darstellung eines veränderlichen, induktiven Leitwertes wurde die Parallelschaltung einer festen Induktivität, die einen Leitwert von der Größe des Maximalwertes der verwendeten Drehkondensatoren hat, mit einem dieser veränderlichen, kapazitiven Leitwerte gefunden. Durch Änderung der Kapazität des Drehkondensators von etwa 0 bis zum Höchstwert läßt sich der induktive Leitwert der Parallelschaltung von seinem Maximalwert bis 0 verändern. Die Drehkondensatoren erhalten eine Eichung in positiven Leitwerteinheiten, die dann gilt, wenn sie allein benutzt werden, und eine zweite in negativen Leitwerten für den Fall, daß sie in Parallelschaltung mit einer festen Induktivität zur

Darstellung eines veränderlichen, induktiven Leitwertes verwendet werden. Auch im zweiten Fall ist der Leitwert linear von der Kapazität abhängig, die Eichkurve also eine gerade Linie:

$$\mathfrak{g} = -j \cdot \frac{1}{\omega L} \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C).$$

Dabei ist zunächst angenommen, daß auch die benutzten Spulen als reine Blindwiderstände anzusehen sind; diese Voraussetzung ist nur angenähert erfüllt; damit das Gerät schnell genaue Ergebnisse liefert, ist jedoch die Verwendung weitgehend rein imaginärer Leitwerte unbedingt erforderlich. Es ist daher noch zu prüfen, wie sich die sog. Güte $\gamma = \frac{X}{R}$ der Parallelschaltung mit der parallelgeschalteten Kapazität ändert.

γ_1 sei die Güte der Spulen ohne Parallelkapazität bei der später zu benutzenden Meßfrequenz, γ_2 die Güte der Parallelschaltung, $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ die entsprechenden Leitwerte.

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L + R} = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \frac{1}{j + \frac{1}{\gamma_1}}$$

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{1}{j\,\omega\,L + R} + j\,\omega\,C = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot \left(\frac{1}{j + \frac{1}{\gamma_1}} - \frac{\omega^2 L\,C}{j} \right).$$

Da die Güte der Spulen selbst sehr hoch gewählt wird, ist:

$$\mathfrak{g}_1 \approx \frac{1}{\omega L} \cdot \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{\gamma_1} \right) = \frac{1}{j\,\omega\,L} + \frac{1}{\omega\,L} \cdot \frac{1}{\gamma_1}$$

$$\mathfrak{g}_2 \approx \frac{1}{\omega\,L} \cdot \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{j} \right) = \frac{1}{j\,\omega\,L} (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + \frac{1}{\omega\,L} \cdot \frac{1}{\gamma_1}.$$

Aus dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{g}_2$ ist zu ersehen, daß der imaginäre Leitwert der Parallelschaltung ungefähr linear mit der Kapazität abnimmt wie bei Benutzung einer reinen Induktivität, daß zu dem imaginären Anteil des Leitwertes aber ein ungefähr konstant bleibender reeller Anteil hinzukommt. Für die Güte der Parallelschaltung erhält man folgenden Ausdruck:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C),$$

d. h. die Güte nimmt mit dem Leitwert der Parallelschaltung linear ab. Soll daher der induktive Leitwert im Verhältnis 1 : 100 geändert werden können und dabei die Güte 5 nicht unterschritten werden, so müßte die Spule selbst eine Eigengüte 500 haben; dieser Wert wird in der Hochfrequenztechnik ungefähr erreicht.

Es standen Drehkondensatoren mit einer Maximalkapazität von ca. 4500 pF in größerer Anzahl zur Verfügung. Für die induktiven Leitwerte wurden aus Gründen der einfachen Herstellung und des geringen Raumbedarfs Induktivitäten von 10 mH gewählt. Nimmt man den Bereich, in dem die Leitwerte veränderlich sein sollen, mit etwa 1 : 100 an — mit den vorhandenen Kondensatoren wurde nur ein Bereich 1 : 67,5 erzielt —, so erhält man einen Kleinstwert der Kapazitäten von 45 pF; da positive und negative Leitwerte natürlich den gleichen Größenbereich haben sollen, ergibt sich die Frequenz der zu verwendenden Spannungsquelle von selbst:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C_{\min}}.$$

Man erhält in diesem Falle eine Frequenz von 239 kHz ($\omega = 1{,}5 \cdot 10^6\ s^{-1}$). Die verwendeten Leitwerte hatten bei dieser Frequenz einen Bereich (gegeben durch die Anfangs- und Endkapazität der Drehkondensatoren) von $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ bis $6{,}75 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\Omega}\right)$; als Leitwerteinheit wurde $10^{-3} \cdot \frac{1}{\Omega}$ gewählt.

Als Spannungsquelle kommt bei der erforderlichen, hohen Frequenz von $f = 239$ kHz nur ein Röhrengenerator in Frage. Es wurde zunächst ein selbsterregter Röhrensender mit einer Telefunkenröhre RS 213 benutzt, dem die Hochfrequenzspannung mit einer verschiebbaren Ankopplungsspule entnommen wurde; sie konnte durch Änderung der Kopplung dieser Spule

mit dem Sender und durch Ändern der Heiz- und Anodenspannung des Senders geregelt werden. Da die Frequenz dieses Senders infolge des Auftretens von Kopplungswellen bei Resonanznähe in irgendeinem Teil des Netzwerkes nicht die erforderliche Konstanz aufwies, wurde später ein Sender mit Fremdsteuerung benutzt (s. Abb. 3). Eine praktisch absolute Frequenzkonstanz könnte durch Quarzsteuerung erzielt werden; jedoch genügte die Fremdsteuerung des Senders schon vollkommen. Außerdem wurde durch die Fremdsteuerung eine sehr große Oberwellenfreiheit erreicht, da der Sender jetzt 3 auf die Grundwelle abgestimmte Kreise besaß.

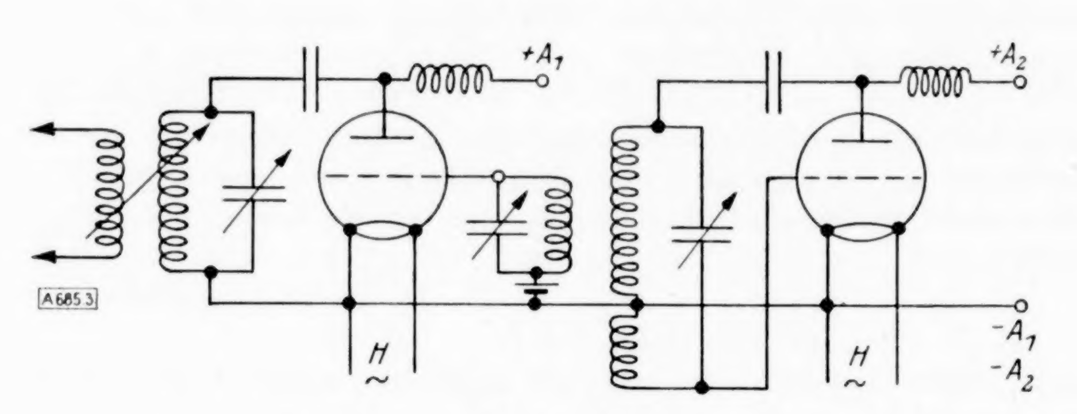


Abb. 3.

Das eine Ende der Ankopplungsspule wird fest mit dem Nullpunkt des Netzwerkes, d. i. der $(n+1)$. Knotenpunkt, verbunden, während das andere Ende über je einen Strommesser und Regelwiderstand mit allen übrigen Knotenpunkten verbunden wird. Die einzelnen Ströme sollen gleichphasig sein; sie sind das schon insoweit, als sie nur gleichgerichtet oder entgegengerichtet sein können, da das Netzwerk ja nur positiv oder negativ imaginäre Leitwerte, nicht jedoch komplexe Leitwerte besitzt. Als Regelwiderstände kommen daher auch nur imaginäre Widerstände in Betracht; besonders gut eignen sich hier wieder Drehkondensatoren.

6. Messung der Spannungen und Ströme. Als Strommesser wurden zunächst Hitzdrahtstrommesser benutzt; da der ausnutzbare Meßbereich dieser Instrumente sehr klein ist, und da sie außerdem durch ihren Ohmschen Widerstand die Gleichphasigkeit der Ströme im Netzwerk beeinträchtigen, wurden später die Ströme durch Messung der Spannung, die sie an kapazitiven Widerständen hervorriefen, gemessen; es wurden also in die Zuleitung zu jedem Knotenpunkt mehrere Kapazitäten verschiedener Größenordnung eingeschaltet, an denen mit einem Röhrenvoltmeter die Spannung gemessen werden konnte; die Röhrenvoltmeter erhielten Eichungen in Stromeinheiten für die einzelnen Kapazitäten. Diese Strommessung hat den Vorteil, daß der Meßbereich sehr groß ist, daß die Gleichphasigkeit der Ströme nicht gestört wird, und daß eine Überschreitung des Meßbereiches die Instrumente nicht gefährdet.

Als Röhrenvoltmeter für die Strommessung wie auch für die eigentlichen Spannungsmessungen im Netzwerk zur Bestimmung der Unbekannten wurden Röhrenvoltmeter mit Gittergleichrichtung verwendet, da sich alle anderen Arten von Röhrenvoltmetern, die mit negativer Gittervorspannung arbeiten, im vorliegenden Falle als ungeeignet erwiesen. Da im Netzwerk wie bei der Strommessung Spannungen an rein kapazitiven Widerständen zu messen sind, würde eine negative Gittervorspannung statische Aufladungen des Netzes zur Folge haben; der Ausschlag des Instruments würde nicht nur von der zu messenden Wechselspannung, sondern auch von der statischen Spannungsverteilung im Netz abhängen.

Das Röhrenvoltmeter mit Gittergleichrichtung, das ohne eine äußere negative Vorspannung arbeitet, besitzt diesen Nachteil nicht; seine Schaltung zeigt Abb. 4; der Meßbereich dieses Instruments reichte von 0,1 bis etwa 5 Volt; da aber im Netz Spannungen bis etwa 100 Volt auftraten, genügte das Instrument in dieser Form noch nicht; durch Umkehrung

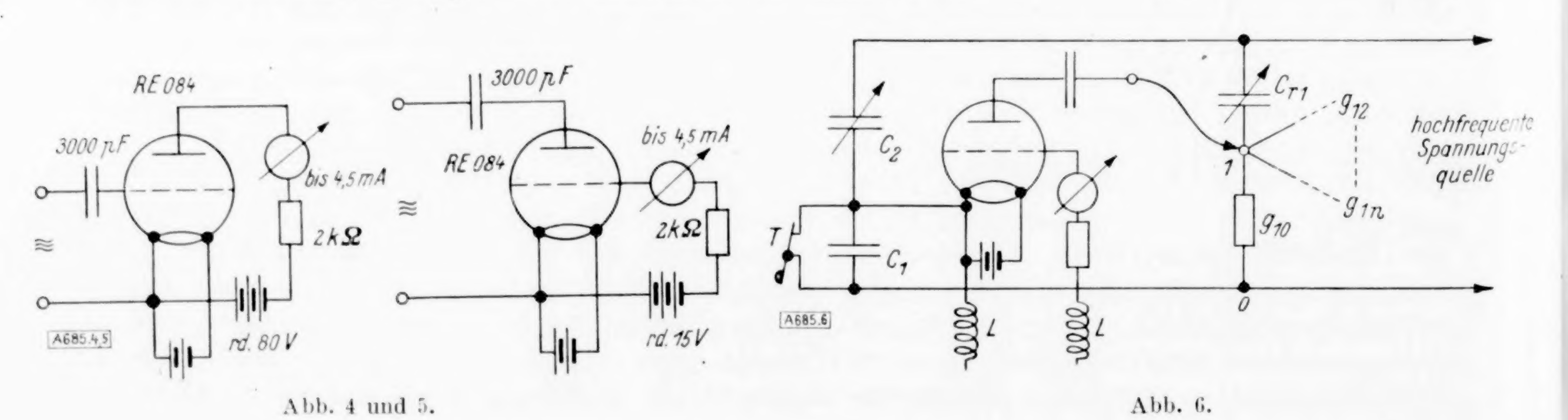


Abb. 4 und 5.

Abb. 6.

der Funktionen der Elektroden einer Röhre kann man jedoch ein Röhrenvoltmeter erhalten, das je nach der verwendeten Röhre einen Meßbereich bis 150 Volt und mehr besitzt. Die zu messende Spannung wird nicht an das Gitter und die Kathode der Röhre, sondern an Anode und Kathode gelegt, während im Gitterkreis eine Batterie und ein Strommesser liegen. Die Erhöhung des Meßbereiches bei dem umgekehrten Röhrenvoltmeter hängt von dem Durchgriff D der verwendeten Röhre ab; sie beträgt beinahe das $1/D^2$-fache; Abb. 5 zeigt die Schaltung des umgekehrten Röhrenvoltmeters.

7. Bestimmung des Vorzeichens der Unbekannten. Zur Ermittlung der Unbekannten eines abgebildeten Gleichungssystems ist es nicht nur erforderlich, die Größe der Spannungen zwischen den Knotenpunkten des Netzes und dem Nullpunkt zu messen, sondern diese Spannungen auch dem Vorzeichen nach zu bestimmen. Diese Vorzeichenbestimmung kann nur indirekt erfolgen. Jede unbekannte Spannung wird zunächst der Größe nach gemessen; dann wird die Differenz zwischen dieser Spannung und einer dem Vorzeichen nach bekannten Spannung gemessen; ist diese Differenz kleiner als die zuerst gemessene Spannung, so hat die letztere das gleiche Vorzeichen wie die Hilfsspannung; ist die Differenz größer, so hat die zu bestimmende Spannung das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Hilfsspannung. Die praktische Ausführung dieser Vorzeichenbestimmung erfolgte mit einer Meßanordnung nach Abb. 6.

Zur Bestimmung der Unbekannten x_1 (Gleichungssystem 4) soll in dem abbildenden Netzwerk die Spannung u_1 zwischen dem Knotenpunkt 1 und dem Nullpunkt der Größe und dem Vorzeichen nach ermittelt werden. C_{r1} ist der Regelkondensator, mit dem der Strom, der in den Knotenpunkt 1 zu schicken ist, auf die erforderliche Größe eingestellt wird; an die hochfrequente Spannungsquelle ist außer dem eigentlichen Netz noch eine Reihenschaltung einer festen Kapazität c_1 und einer veränderlichen Kapazität c_2 angeschlossen; an der Kapazität c_1 liegt also unter allen Umständen eine der Gesamtspannung gleichgerichtete Spannung und, da das gesamte Netz nur imaginäre Leitwerte besitzt und in ihm daher nur gleichgerichtete oder entgegengerichtete Spannungen auftreten können, eine positiv zu nennende Spannung. Die Kapazität c_1 ist zunächst bei der Messung der Größe der Spannung u_1 kurzgeschlossen; die Kathode der Meßröhre liegt am Nullpunkt des Netzes. Zur Vorzeichenbestimmung wird die Taste T gedrückt und damit der Kurzschluß des Kondensators c_1 aufgehoben; die Kathode der Meßröhre erhält dadurch gegenüber dem Nullpunkt des Netzes eine positive Spannung. Ist die dem Vorzeichen nach zu bestimmende Spannung u_1 nun auch positiv, so liegt an der Röhre jetzt eine geringere Spannung, und das Meßinstrument zeigt eine geringere Spannung an; ist u_1 negativ, so wird von dem Röhrenvoltmeter eine größere Spannung gemessen. Die Drosseln L von je 0,1 H stellen für die Hochfrequenz praktisch eine Isolierung dar und machen den Einfluß von Kapazität der Batterie und deren Zuleitungen gegen Erde auf den Meßvorgang unwirksam; das gesamte Röhrenvoltmeter soll möglichst weitgehend von allen anderen Teilen des Gerätes für Hochfrequenz isoliert sein. Bedingung für die Richtigkeit des Ergebnisses der Vorzeichenbestimmung ist, daß die Hilfsspannung an der Kapazität c_1 kleiner ist als das Zweifache der zu messenden Spannung u_1; durch Änderung der Kapazität c_2 kann diese Bedingung auch in kritischen Fällen immer erfüllt werden.

Zur Darstellung der absoluten Glieder eines Gleichungssystems sollen in die Knotenpunkte des abbildenden Netzwerkes Ströme von der Größe dieser Glieder geschickt werden; die gleichzeitige Speisung des Netzes mit allen diesen so eingestellten Strömen bereitet Schwierigkeiten, da bei der Einstellung eines Stromes die bereits eingestellten Ströme sich mehr oder weniger ändern; eine Verringerung dieser Rückwirkung ist durch Wahl sehr kleiner Regelkondensatoren möglich, erfordert jedoch die Verwendung einer erheblich höheren, hochfrequenten Spannung.

8. Das Superpositionsverfahren. Hier hilft die Anwendung der Methode der Superposition: Die Gesamtlösungen eines Gleichungssystems mit n Gleichungen sind die Summen von Teillösungen, die von den absoluten Gliedern der einzelnen Gleichungen herrühren. Setzt man in einem Gleichungssystem alle absoluten Glieder bis auf das einer Gleichung gleich 0 und löst dieses vereinfachte Gleichungssystem auf, so erhält man für die einzelnen Unbekannten die Teillösungen, die von dem berücksichtigten, absoluten Glied herrühren; löst man in dieser Art die n verschiedenen Gleichungssysteme, die entstehen, wenn immer ein anderes absolutes Glied berücksichtigt wird, während alle anderen gleich 0 gesetzt werden, und bildet die Summen der Einzellösungen für die verschiedenen Unbekannten, so erhält man die Lösungen des vollständigen Gleichungssystems. Bei der elektrischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen bedeutet das Folgendes: In das abbildende Netzwerk werden nicht alle Ströme gleichzeitig hineingeschickt und durch Messung der Spannungen zwischen dem Nullpunkt des Netzes und den n Knotenpunkten die Gesamtlösungen des aufzulösenden Systems erhalten,

sondern nacheinander werden die einzelnen Ströme in die entsprechenden Knotenpunkte geschickt, und jedesmal werden durch Spannungsmessungen Teillösungen ermittelt. Die Summen der n gemessenen Spannungen der gleichen Knotenpunkte ergeben die Lösungen des gegebenen Gleichungssystems. Die Anwendung der Überlagerung bringt außer der einfachen Einstellung der Ströme noch weitere Vorteile: Es wird nur ein Strommesser gebraucht, d. h. ein Röhrenvoltmeter für die Strommessung; die Bedingung der Gleichphasigkeit der Ströme als Voraussetzung für die Richtigkeit der Ergebnisse ist von selbst erfüllt, da statt der elektrischen Summierung eine rechnerische Addition der Beträge der Teillösungen erfolgt; zur Speisung des Netzwerkes wird eine weniger große Stromquelle benötigt. Gegenüber diesen Vorteilen fällt der Nachteil der größeren Zahl der Messungen meist nicht ins Gewicht.

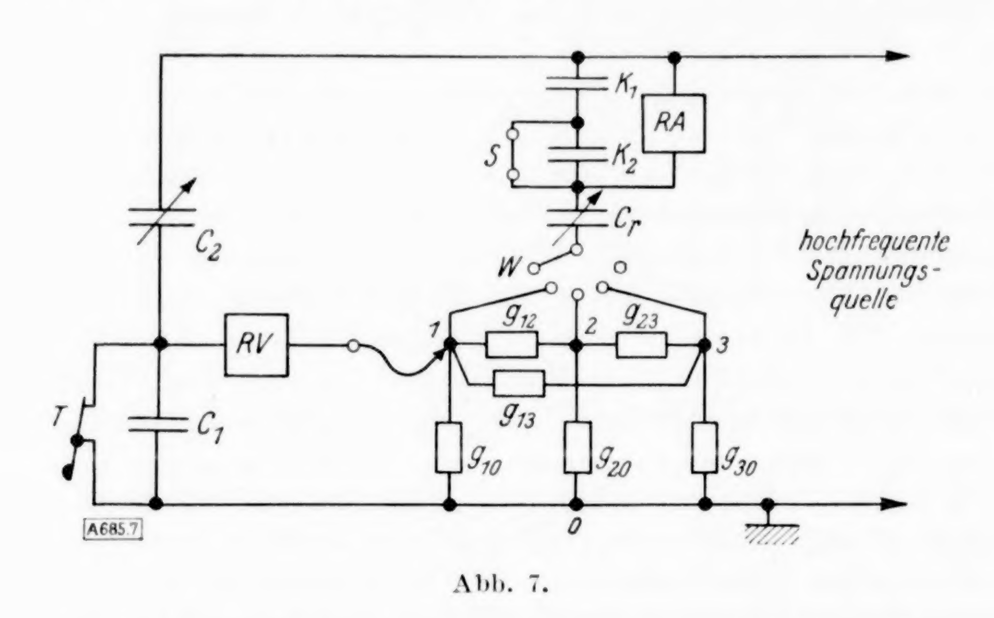


Abb. 7.

In Abb. 7 ist die Prinzipschaltung des Gerätes für Gleichungslösung dargestellt, das nach den im Vorhergehenden erläuterten Gesichtspunkten gebaut wurde.

RA ist die Strommeßeinrichtung, die aus den Kapazitäten K_1 und K_2 und einem Röhrenvoltmeter besteht; K_2 hat die Größe $1/9 \cdot K_1$ und ist bei Messung größerer Ströme durch einen Schalter kurzgeschlossen; durch Öffnung des Schalters S kann der Meßbereich des Röhrenstrommessers auf $^1/_{10}$ des ersten Bereiches verkleinert werden. C_r ist ein Drehkondensator zur Einstellung der Ströme auf die vorgeschriebene Größe; mit dem Wahlschalter W kann der Strommesser und der Regelkondensator mit den einzelnen Knotenpunkten des Netzes verbunden werden. Mit dem Röhrenvoltmeter *RV* werden jedesmal die Spannungen der Knotenpunkte $1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ gegen den Nullpunkt 0 des Netzes bei der Speisung des Netzwerkes in den einzelnen Knotenpunkten gemessen; die Reihenschaltung des Festkondensators c_1 und des Drehkondensators c_2 dient zur Vorzeichenbestimmung (s. vorher).

9. Die Genauigkeit der gefundenen Lösungen. Nachdem ein praktisch brauchbarer Aufbau für das Gerät gefunden war, mußte noch untersucht werden, mit welcher Genauigkeit Lösungen von Gleichungssystemen mit ihm zu erhalten sind. Eine Angabe der Ungenauigkeit der Ergebnisse auf Grund bekannter Fehler des Gerätes, z. B. infolge von Wirkanteilen der Leitwerte ist nicht möglich, da der Fehlwinkel der Leitwerte nicht konstant ist, und da die Fehler der Ergebnisse außer von der ungenauen Abbildung eines Gleichungssystems durch ein Netzwerk auch von dem Betriebszustand dieses Netzwerks, z. B. davon, in welchem Punkte gerade die Speisung stattfindet, abhängt. Trotz der ungenauen Abbildung und trotz fehlerhafter Spannungsmessungen lassen sich jedoch mit dem Gerät beliebig genaue Lösungen ermitteln, wenn man das Lösungsverfahren wiederholt anwendet, eine Möglichkeit, auf die schon Lord Kelvin in der Beschreibung seiner Lösungsmaschine hingewiesen hat.

Setzt man die zuerst erhaltenen Näherungslösungen für die Unbekannten in die zu lösenden Gleichungen ein, so befriedigen sie diese nicht vollkommen; die gefundenen Differenzen können als die absoluten Glieder eines neuen Gleichungssystems angesehen werden, das sich im übrigen von dem ursprünglichen System nicht unterscheidet. Die Abbildung durch ein Netz ist also die gleiche wie die des ersten Systems; nur die Speisung des Netzes hat mit anderen Strömen zu erfolgen. Die durch Spannungsmessungen erhaltenen Lösungen des neuen Gleichungssystems stellen die ersten Verbesserungen der zuerst gefundenen Näherungslösungen des ursprünglichen Systems dar. Man erhält also verbesserte Lösungen für die Unbekannten durch Addition der ersten Näherungslösungen und der ersten Verbesserungen; setzt man diese verbesserten Lösungen in die zu lösenden Gleichungen ein, so werden diese zwar besser, aber noch nicht vollkommen erfüllt; die jetzt gefundenen Differenzen bilden wiederum die absoluten Glieder eines neuen Gleichungssystems, dessen Lösung neue Ver-

besserungen ergibt; durch Wiederholung dieses Verfahrens kann die Genauigkeit der Lösungen für die Unbekannten des aufzulösenden Gleichungssystems beliebig weit getrieben werden. Eine Kontrolle für die jeweils in den einzelnen Stufen erreichte Genauigkeit ermöglicht die in jeder Stufe erfolgende Bestimmung neuer absoluter Glieder; aus dem Größenverhältnis der neuen absoluten Glieder zu den ursprünglichen absoluten Gliedern ersieht man am einfachsten die wahrscheinlichen Fehler der absolut größten Unbekannten.

Die vorstehend beschriebene Art der Bestimmung von Verbesserungen für die Lösungen setzt nicht voraus, daß die Abbildung des zu lösenden Systems vollkommen fehlerlos erfolgt ist, oder daß die das Netz speisenden Ströme genau eingestellt werden; sie erlaubt vielmehr die Bestimmung beliebig genauer Lösungen in jedem Falle, bei ungenauer Abbildung der Koeffizienten durch elektrische Leitwerte, bei Verwendung nicht rein imaginärer Leitwerte, bei ungenauer Einstellung der das Netz speisenden Ströme und bei ungenauer Messung der Spannungen zwischen den Knotenpunkten. Der Grund für diese Möglichkeit der Bestimmung beliebig genauer Lösungen ist der, daß bei jeder Verbesserung auf die ursprünglichen Gleichungen und nicht auf die abgebildeten Gleichungen zurückgegangen wird, und so dauernd die Fehler, die durch ungenaue Abbildung und Messung entstehen, durch rechnerische Zwischenkontrolle ausgeglichen werden. Die schließlich erhaltenen Endergebnisse brauchen durchaus nicht mehr eine auch nur angenäherte Lösung des Abbildungssystems darzustellen; sie sind jedoch eine Näherungslösung für das aufzulösende System.

10. Das Einheitsstromverfahren. Die Bestimmung beliebig genauer Lösungen für ein Gleichungssystem bei nur einmaliger Benutzung des elektrischen Lösungsgeräts ermöglicht ein Verfahren, das als Einheitsstromverfahren zu bezeichnen wäre. Bei Anwendung der Superposition, d. h. bei Speisung des abbildenden Netzes jeweils nur in einem Knotenpunkt und Addition der Teillösungen für die Speisung in den verschiedenen Punkten sind diese Teillösungen dem speisenden Strom proportional; es ist daher nicht erforderlich, in einen Knotenpunkt den Strom zu schicken, den das absolute Glied der entsprechenden Gleichung vorschreibt, sondern man kann einen beliebigen Strom zur Speisung benutzen und die erhaltenen Spannungen mit einem dem absoluten Glied entsprechenden Faktor multiplizieren; zweckmäßigerweise wird man diesen Strom so auswählen, daß nur mit dem Zahlenwert des absoluten Gliedes zu multiplizieren ist. Die Gleichungen, die zur Ermittlung von Verbesserungen für die ersten Näherungslösungen zu lösen sind, unterscheiden sich von den ursprünglichen Gleichungen nur durch die absoluten Glieder; statt nun das abbildende Netz mit Strömen, die gleich den neuen absoluten Gliedern sind, nacheinander zu speisen und die Teillösungen zu bestimmen, kann man die letzteren einfacher durch Multiplikation der Spannungen, die schon früher bei Speisung mit der Stromeinheit gemessen wurden und zur Ermittlung der ersten Näherungen dienten, mit neuen Faktoren erhalten. In gleicher Weise können alle weiteren Verbesserungen aus den Spannungsmessungen bei Speisung mit der Stromeinheit bestimmt werden.

11. Allgemeiner Lösungsgang. Der Lösungsgang eines Gleichungssystems (5) mit n Gleichungen gestaltet sich jetzt folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{1n}\cdot x_n \\ y_2 &= a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{2n}\cdot x_n \\ y_3 &= a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{3n}\cdot x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{nn}\cdot x_n \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (5).$$

Bedingung für die Möglichkeit der elektrischen Auflösung überhaupt ist die Symmetrie der Hauptdeterminante, d. h. es muß $a_{ik} = a_{ki}$ sein.

Zur Abbildung des Systems mit n Gleichungen ist ein Netzwerk mit $(n+1)$ Knotenpunkten erforderlich; die Größe der Kopplungsleitwerte zwischen den Knotenpunkten (die Indizes geben an, welche beiden Knotenpunkte von dem betreffenden Leitwert verbunden werden) erhält man aus den Koeffizienten des Gleichungssystems nach folgenden einfachen Formeln:

$$\begin{aligned} g_{10} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots\dots + a_{1n} & g_{12} &= -a_{12} \\ g_{20} &= a_{22} + a_{21} + a_{23} + \dots\dots + a_{2n} & g_{23} &= -a_{23} \\ g_{30} &= a_{33} + a_{31} + a_{32} + \dots\dots + a_{3n} & g_{13} &= -a_{13} \\ g_{n0} &= a_{nn} + a_{n1} + a_{n2} + \dots\dots + a_{n(n-1)} & g_{mn} &= -a_{mn}\,. \end{aligned}$$

Leitwerte, für die sich positive Werte ergeben, werden durch Einschaltung von Drehkondensatoren allein zwischen den entsprechenden Knotenpunkten dargestellt, Leitwerte, für die negative Werte erhalten werden, durch Drehkondensatoren in Parallelschaltung mit festen Induktivitäten; die Einstellung der Leitwerte auf die geforderten Werte erfolgt in beiden Fällen nur mit den Drehkondensatoren, die zu diesem Zweck eine Eichung in positiven und negativen Leitwerten besitzen.

Nun wird das abbildende Netz nacheinander in den Knotenpunkten 1 bis n mit einem Strom von der Größe der Stromeinheit gespeist; bei der Speisung im Knotenpunkt 1 werden zwischen dem Nullpunkt des Netzes einerseits und den Knotenpunkten 1 bis n andererseits die Spannungen

$$u_{11},\quad u_{12},\quad u_{13},\quad u_{14},\quad \ldots\ldots u_{1n}$$

nach Größe und Vorzeichen gemessen; bei Speisung im Knotenpunkt 2 werden die Spannungen

$$u_{21},\quad u_{22},\quad u_{23},\quad u_{24},\quad \ldots\ldots u_{2n}$$

gemessen, bei Speisung im Punkte n die Spannungen

$$u_{n1},\quad u_{n2},\quad u_{n3},\quad u_{n4},\quad \ldots\ldots u_{nn}.$$

Die Teillösungen für das Gleichungssystem, bei dem alle absoluten Glieder bis auf eines gleich 0 gesetzt sind, erhält man durch Multiplikation der entsprechenden, bei der Stromeinheit gemessenen Spannungen mit diesem absoluten Glied; die Teillösungen für den Fall, daß das Gleichungssystem nur das absolute Glied y_1 besitzt, sind also die folgenden:

$$x_{11}=y_1\cdot u_{11},\qquad x_{12}=y_1\cdot u_{12},\qquad x_{13}=y_1\cdot u_{13},$$
$$x_{14}=y_1\cdot u_{14},\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{1n}=y_1\cdot u_{1n}.$$

Bei alleinigem Vorhandensein des absoluten Gliedes y_2 erhält man die Teillösungen:

$$x_{21}=y_2\cdot u_{21},\qquad x_{22}=y_2\cdot u_{22},\qquad x_{23}=y_2\cdot u_{23},$$
$$x_{24}=y_2\cdot u_{24},\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{2n}=y_2\cdot u_{2n}.$$

Die ersten Näherungslösungen für das gesamte Gleichungssystem sind dann die folgenden:

$$x_1=x_{11}+x_{21}+x_{31}+\ldots\ldots\ldots+x_{n1}=y_1\cdot u_{11}+y_2\cdot u_{21}+y_3\cdot u_{31}+\ldots\ldots\ldots+y_n\cdot u_{n1},$$
$$x_2=x_{12}+x_{22}+x_{32}+\ldots\ldots\ldots+x_{n2}=y_1\cdot u_{12}+y_2\cdot u_{22}+y_3\cdot u_{32}+\ldots\ldots\ldots+y_n\cdot u_{n2},$$
$$\vdots$$
$$x_n=x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\ldots\ldots\ldots+x_{nn}=y_1\cdot u_{1n}+y_2\cdot u_{2n}+y_3\cdot u_{3n}+\ldots\ldots\ldots+y_n\cdot u_{nn}.$$

Die ersten Näherungslösungen werden in die zu lösenden Gleichungen eingesetzt; sie erfüllen diese nicht vollkommen, sondern es ergeben sich die Differenzen

$$y'_1,\quad y'_2,\quad y'_3,\quad y'_4,\quad \ldots\ldots\ldots y'_n.$$

Diese Differenzen sind die absoluten Glieder eines neuen Gleichungssystems, durch dessen Lösung man die ersten Verbesserungen der ersten Näherungslösungen erhält; die ersten Verbesserungen haben folgende Werte:

$$x'_1=y'_1\cdot u_{11}+y'_2\cdot u_{21}+y'_3\cdot u_{31}+\ldots\ldots\ldots+y'_n\cdot u_{n1},$$
$$x'_2=y'_1\cdot u_{12}+y'_2\cdot u_{22}+y'_3\cdot u_{32}+\ldots\ldots\ldots+y'_n\cdot u_{n2},$$
$$\vdots$$
$$x'_n=y'_1\cdot u_{1n}+y'_2\cdot u_{2n}+y'_3\cdot u_{3n}+\ldots\ldots\ldots+y'_n\cdot u_{nn}.$$

Die verbesserten Lösungen des Gleichungssystems sind die Summen der ersten Näherungslösungen und der ersten Verbesserungen; werden diese in die zu lösenden Gleichungen eingesetzt, so werden neue Differenzen erhalten, aus denen wie oben neue Verbesserungen bestimmt werden können; durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann eine beliebige Genauigkeit der Lösungen erreicht werden.

Maßgebend für die Schnelligkeit, mit der die gewünschte Genauigkeit erreicht wird, ist natürlich die Genauigkeit der bestimmten Teillösungen und damit der ersten Näherungslösungen; mit dem gebauten Versuchsgerät wurde bei den ersten Näherungslösungen eine Genauigkeit von etwa 2,5 % für die größte Unbekannte erzielt.

12. Anwendungsbeispiel. Es sei das folgende Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} 104 &= -61\,x_1 + 19\,x_2 + 30\,x_3 \\ 34 &= 19\,x_1 - 13\,x_2 - 21\,x_3 \\ 51 &= 30\,x_1 - 21\,x_2 + 35\,x_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Für die Leitwerte des abbildenden Netzes erhält man folgende Werte:

$$g_{10} = -12, \qquad g_{20} = -15, \qquad g_{30} = +44,$$

$$g_{12} = -19, \qquad g_{13} = -30, \qquad g_{23} = +21.$$

Die Leitwerte g_{10}, g_{20}, g_{12} und g_{13} sind hiernach durch Parallelschaltungen von Induktivitäten und Drehkondensatoren und die Leitwerte g_{30} und g_{23} durch Drehkondensatoren allein einzustellen. Man kann jedoch auch für die negativ berechneten Leitwerte Drehkondensatoren und für die positiv berechneten Parallelschaltungen wählen; im vorliegenden Fall wurden z. B. die Leitwerte g_{30} und g_{23} durch Parallelschaltungen von Induktivitäten und Drehkondensatoren und alle übrigen Leitwerte durch Drehkondensatoren allein eingestellt.

Die rechnerische Lösung ergibt für die Unbekannten folgende Werte:

$$x_1 = -4{,}6228\ldots, \qquad x_2 = -9{,}2048\ldots, \qquad x_3 = -0{,}1033\ldots$$

Das Lösungsgerät lieferte unter Anwendung des Einheitsstromverfahrens die ersten Näherungen

$$x_1 = -4{,}85, \qquad x_2 = -9{,}40, \qquad x_3 = -0{,}02,$$

die zweiten Näherungen

$$-4{,}594, \qquad -9{,}169, \qquad -0{,}092$$

und die dritten Näherungen

$$-4{,}6233, \qquad -9{,}2032, \qquad -0{,}0990.$$

Die vorstehenden Ergebnisse zeigen die Brauchbarkeit des gebauten Gerätes für die Lösung symmetrischer, linearer Gleichungssysteme. Die Vorteile dieses Verfahrens gegenüber der rechnerischen Lösung treten besonders bei Gleichungssystemen mit einer größeren Anzahl von Unbekannten und Gleichungen hervor.

Für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge bei ihrer Durchführung danke ich Herrn Professor Schwenkhagen, jetzt an der Technischen Hochschule in Danzig. 685

Schrifttum-Verzeichnis.

[1]) Rechnerische Näherungsverfahren: L. Seidel: Abhandl. d. math.-phys. Klasse d. Bayer. Akad. Bd. 11, 1874. — R. Mehmke u. P. A. Nekrassow: Moskauer Math. Ges., Bd. 16, 1892. Graphische Verfahren: Massau: Ann. de l'Assoc. des ing. sortis des écoles spéc. de Gand 1889. — J. F. van den Berg: Amst. Akad. Versl. en Meded., Bd. 4, 1887.

[2]) W. Thomson (Lord Kelvin): On a machine for the solution of simultaneous linear equations. Nature, London 1878/79, Bd. 19, S. 161. Proceed. of the Royal Society of London, 1878/79, S. 111.

[3]) J. Nowak: Eine Maschine zum Berechnen elektrischer Leitungsnetze. ETZ 1911, Bd. 32, S. 973 u. 1006.

[4]) M. Nähbauer: Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1910, S. 241.

[5]) K. Fuchs: Hilfsapparat zur Berechnung elektrischer Leitungsnetze. Elektrot. u. Maschinenb., Wien 1913, Bd. 31, S. 1115.

Über den Träger auf elastischer Unterlage.

Von *K. Marguerre* in Berlin-Adlershof.

1. Einleitung. Der Träger auf elastischer (nachgiebiger) Unterlage ist wegen seiner großen technischen Bedeutung schon seit langer Zeit der Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen gewesen. Eine besonders eingehende Behandlung hat das Problem in dem Buche gleichen Titels von K. Hayashi gefunden[1]). Die Voraussetzung der Theorie ist die von Zimmermann[2]) benutzte Annahme der Proportionalität von Normaldruck und Normaldurchsenkung der nachgiebigen („bettenden") Unterlage; diese Annahme ist streng genommen nur erfüllt für eine Unterlage, die (wie die Flüssigkeiten) keinerlei Schubspannungen zu übertragen vermag — man könnte also vom schwimmenden Träger sprechen.

Die vorliegende Untersuchung betrachtet den Träger auf einer „wirklich" (d. h. im Hookeschen Sinne) elastischen Unterlage. Sie erörtert insbesondere auch die Frage, ob ein auf diese Weise gelagerter, durch konzentrierte Lasten beanspruchter Träger sich in einiger Entfernung vom Lastangriffspunkt von der Unterlage abhebt, wie dies aus der Theorie des schwimmenden Trägers folgt.

Um den Unterschied (und auch die Verwandtschaft) der beiden Hypothesen über das Verhalten des Baugrundes deutlich hervortreten zu lassen, sollen beide Fälle in gleicher Weise nebeneinanderher behandelt werden. Als Beispiel diene der einfachste Fall: der unendlich lange Balken unter Einzellast, gebettet auf dem „elastischen" bzw. „nachgiebigen" Halbraum. Um von diesem ebenen Problem (was hier nur in den Resultaten geschehen soll) leicht auf das analoge achsensymmetrische Problem (die allseits unendlich ausgedehnte Platte unter Einzellast) übergehen zu können, soll aber nicht der Balken (ebener Spannungszustand), sondern die unendliche Platte unter Schneidenlast senkrecht zur betrachteten Ebene durchgerechnet werden (ebener Formänderungszustand). Diese Aufgabe unterscheidet sich im Ergebnis von der eigentlichen Balkenaufgabe nur in Größen, deren Zahlenwert (in engen Grenzen) von der Wahl der Querkontraktionsziffer $m = \frac{1}{\nu}$ beeinflußt wird.

2. Koordinaten und Bezeichnungen. Die elastische Platte liege waagerecht auf der Unterlage; die x-Achse falle in die Berührungsebene, senkrecht zu der Schneidenlast (y-Achse); die Schneidenlast P' (als verteilte Last $p = p(x)$) wirke senkrecht zur Platte in Richtung

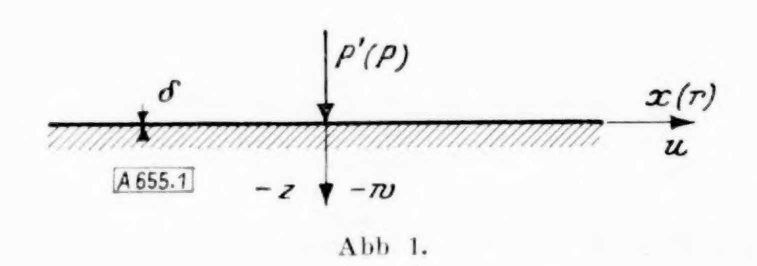


Abb. 1.

fallender z (Abb. 1). Die Dicke der Platte sei δ, ihr Trägheitsmoment $J = \delta^3/12$; ihre elastischen Konstanten $E, G, m \left(E' = E\frac{m^2}{m^2-1} = G\frac{2\,m}{m-1}\right)$.

Die Konstanten des elastischen Baugrundes seien E_0, G_0, m_0 — ohne die absolute Größe der Querdehnungszahl zunächst festzulegen, sei zur Vereinfachung angenommen, daß $m = m_0$, also auch $E/E_0 = G/G_0$. Die Spannung zwischen Platte und Unterlage sei $q = q(x)$. K sei die Bettungsziffer der nachgiebigen Unterlage. — Im achsensymmetrischen Fall tritt an Stelle von x der Radiusvektor r, an Stelle der Streckenlast P' die Einzellast P. u, w sind in beiden Fällen die Verschiebungen in den Achsenrichtungen.

3. Die Normalspannung zwischen Platte und Baugrund. Mit Hilfe des Fourierschen Integraltheorems definieren wir die den Funktionen $w(x), p(x), q(x)$ zugeordneten Funktionen W, P, Q durch die Gleichungen:

[1]) K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921.

[2]) Hierüber und über weitere Literatur vgl. Handbuch der Physik VI, S. 180 u. 224, Berlin 1928; insbesondere ist dort auch über Verbesserungen des Zimmermannschen Ansatzes berichtet; siehe auch Prager: ZAMM 7 (1927), S. 354, und die Arbeiten von Schleicher. — Neuerdings hat M. A. Biot (J. appl. Mech. 4, 1 bis 7 [1937]) die in der vorliegenden Arbeit untersuchte spezielle Frage in ähnlicher Weise behandelt (Anm. während der Korrektur).

$$\left.\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi)\cdot\cos\xi x\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} W(\xi)\cdot\cos\xi x\,d\xi \\ p(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} P(\xi)\cos\xi x\,d\xi, \qquad q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Q(\xi)\cos\xi x\,d\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (3.1),$$

wobei schon benutzt ist, daß die Funktionen w, p, q gerade Funktionen in x sein sollen.

Die Differentialgleichung der Balken- (Platten-) biegung:

$$E' J w^{\mathrm{IV}} - p(x) + q(x) = 0$$

(p, q hier als Zug positiv eingeführt) geht damit über in

oder

$$\left.\begin{aligned} E' J \xi^4 W(\xi) - P(\xi) + Q(\xi) &= 0 \\ W(\xi) = \frac{P(\xi) - Q(\xi)}{(\xi\delta)^3}\cdot\frac{1}{\xi}\cdot\frac{6(m-1)}{G m} &= \frac{P(\xi) - Q(\xi)}{(\xi\delta)^4}\,\frac{12\,\delta}{E'} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3.2).$$

Im elastischen Halbraum herrscht nach Voraussetzung ein ebener Formänderungszustand; es kann daher die vom Verfasser an früherer Stelle eingeführte Spannungsfunktion[3]) Φ zur Bestimmung seines elastischen Verhaltens herangezogen werden. Man erkennt leicht[4]), daß der Ansatz:

$$\Phi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(M z e^{\xi z} + N\frac{1}{\xi}e^{\xi z}\right)\cos\xi x\,\frac{d\xi}{\xi^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3.3)$$

mit den willkürlichen „Konstanten“ $M = M(\xi)$, $N = N(\xi)$ zum Ziele führt. Rechnen wir die a. a. O. benutzten Laméschen Konstanten gleich auf die hier benutzten um, so erhält man[5]) für die Spannungen und Verschiebungen in der Berührungsebene zwischen Halbraum und Platte ($z = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2G_0}\sigma_{0z}(x,0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(M - \frac{m}{m-2}N\right)\cos\xi x\,d\xi, \\ \frac{1}{2G_0}\tau_0(x,0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{m-2}M + \frac{m}{m-2}N\right)\sin\xi x\,d\xi, \\ w_0(x,0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(2M - \frac{m}{m-2}N\right)\cos\xi x\,\frac{d\xi}{\xi}, \\ u_0(x,0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{m}{m-2}M + \frac{m}{m-2}N\right)\sin\xi x\,\frac{d\xi}{\xi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3.4).$$

Als Übergangsbedingungen zwischen Platte und Halbraum kann man nun die zwei Gleichungssysteme ansetzen:

(elastischer Halbraum)	(nachgiebiger Halbraum)
$w_0 = w, \quad \sigma_{0z} = q, \quad \tau_0 = 0$	$q = \sigma_{0z} = K w$
oder, für die zugeordneten Funktionen geschrieben:	
$2M - \frac{m}{m-2}N = \frac{6}{G}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{P(\xi) - Q(\xi)}{(\xi\delta)^3}$,	
$M - \frac{m}{m-2}N = \frac{1}{2G_0}\cdot Q(\xi)$,	$\frac{12K\delta}{E'}\,\frac{P(\xi) - Q(\xi)}{(\xi\delta)^4} = Q(\xi)$
$2M + mN = 0$,	

. . . . (3.5).

[3]) K. Marguerre: Spannungsverteilung . . . Platte. Ing.-Arch. 4 (1933), S. 332.
[4]) A. a. O., S. 339.
[5]) A. a. O. Gl. (2.54).

Man erhält also den Druck $Q(\xi)$ zwischen den Medien als Funktion der gegebenen Belastung $\boldsymbol{P}(\xi)$ in der Form:

$$Q(\xi) = \frac{P(\xi)}{1 + \frac{G}{6\,G_0}(\xi\,\delta)^3} \qquad\Bigg|\qquad Q(\xi) = \frac{P(\xi)}{1 + \frac{E'}{12\,K\,\delta}(\xi\,\delta)^4} \quad \ldots\ldots \quad (3.6),$$

und daraus folgt, wenn wir durch

$$l_1 = \sqrt[3]{\frac{2\,E\,J}{E_0}} = \delta\sqrt[3]{\frac{G}{6\,G_0}} \qquad\Bigg|\qquad l_2 = \sqrt[4]{\frac{E'\,J}{K}} = \delta\sqrt[4]{\frac{E'}{12\,K\,\delta}} \quad \ldots \quad (3.7),$$

zwei „Bezugslängen" l_1 und l_2 einführen, und zur Abkürzung setzen

$$\xi_1 = \xi\,l_1, \quad x_1 = \frac{x}{l_1}, \qquad\Bigg|\qquad \xi_2 = \xi\,l_2, \quad x_2 = \frac{x}{l_2}:$$

$$q_1(x_1) = \frac{1}{l_1}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\xi_1)\cos\xi_1 x_1\,\delta\,\xi_1}{1+\xi_1^{\,3}} \qquad\Bigg|\qquad q_2(x_2) = \frac{1}{l_2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\xi_2)\cos\xi_2 x_2\,d\,\xi_2}{1+\xi_2^{\,4}} \quad \ldots \quad (3.8).$$

Tritt an Stelle der Last $p(x)$, speziell die Schneidenlast P' längs $x=0$, so ist[6]) $P(\xi)$ einfach zu ersetzen durch P' (vor dem Integral); die Aufgabe ist damit auf die Diskussion der Integrale

$$\bar{q}_1(x_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi_1\,x_1\,d\,\xi_1}{1+\xi_1^{\,3}} \qquad\Bigg|\qquad \bar{q}_2(x_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi_2\,x_2\,d\,\xi_2}{1+\xi_2^{\,4}} = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\xi_2\,x_2\,d\,\xi_2}{1+\xi_2^{\,4}} \quad (3.9)$$

zurückgeführt.

4. Diskussion der Integrale. Vergleich. Die Auswertung der Integrale (3.9) erfolgt zweckmäßig mit Hilfe des Residuensatzes in einer komplexen $\zeta = \xi + i\,\eta$-Ebene:

$$\bar{q}_1(x_1) = \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\xi_1 x_1}\,d\,\xi_1}{1+\xi_1^{\,3}} \qquad\Bigg|\qquad \bar{q}_2(x_2) = \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi_2 x_2}\,d\,\xi_2}{1+\xi_2^{\,4}} \quad \ldots \quad (4.0).$$

Das Integral $\bar{q}_2$ läßt sich (in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen) dabei in geschlossener Form angeben, für $\bar{q}_1$ erhält man einen geschlossenen Ausdruck und ein numerisch leichter auswertbares Integral. Die Pole (Unendlichkeitsstellen des Nenners) der Integranden liegen bei:

$$\zeta_1^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \zeta_1^{(2)} = -1, \qquad\Bigg|\qquad \zeta_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \zeta_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),$$

$$\zeta_1^{(3)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad\Bigg|\qquad \zeta_2^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad \zeta_2^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

q_1 läßt sich, wegen des Poles bei -1, nicht, wie q_2 längs der negativ reellen Achse integrieren — man wählt hier zweckmäßig den Weg über die positiv imaginäre Achse. In beiden Fällen kann man den Integrationsweg durch einen großen Kreisbogen vom Radius R in der positiv imaginären Halbebene schließen. Das Integral über den Kreis verschwindet mit $R \to \infty$; man hat daher:

$$\bar{q}_1(x_1) = \Re\mathrm{e}\left[2\,i\,\mathrm{Res}(\zeta_1^{(1)}) + \frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta_1 x_1}\,d\,\eta_1}{1 - i\,\eta_1^{\,3}}\right] \qquad\Bigg|\qquad \bar{q}_2(x_2) = \Re\mathrm{e}\,[i\,\mathrm{Res}(\zeta_2^{(1)}) + i\,\mathrm{Res}(\zeta_1^{(2)})].$$

Da die Pole des Integranden $\dfrac{Z(\zeta)}{N(\zeta)}$ einfach sind, ist das Residuum unmittelbar durch $\dfrac{Z(\zeta)}{N'(\zeta)}$ gegeben; man erhält also:

[6]) Vgl. z. B. Anm. S. 225, a. a. O., S. 337 unten.

$$\left.\begin{aligned}
\overline{q}_1(x_1) &= \Re\left[i\frac{e^{i\zeta_1^{(1)}x_1}}{3(\zeta_1^{(1)})^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta_1 x_1}(i-\eta_1^3)}{1+\eta_1^6}\,d\eta_1\right] & \overline{q}_2(x_2) &= \Re\left[i\frac{e^{i\zeta_2^{(1)}x_2}}{8(\zeta_2^{(1)})^3} + i\frac{e^{i\zeta_2^{(2)}x_2}}{8(\zeta_2^{(2)})^3}\right] \\
&= \frac{1}{3}e^{-\frac{x_1}{2}\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x_1}{2} + \sin\frac{x_1}{2}\right) & &= \frac{1}{4}\sqrt{2}\,e^{-\frac{x_2}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \sin\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta_1 x_1}\eta_1^3\,d\eta_1}{1+\eta_1^6} & &
\end{aligned}\right\} \quad (4.1).$$

Die Frage nach dem oszillierenden Charakter der Lösungen ist auf Grund der Formen (4.1) leicht zu beantworten. Bezüglich $\overline{q}_2$ ist keine Erörterung nötig; bezüglich $\overline{q}_1$ erkennt man zunächst, daß der oszillierende (Residuen)anteil bei $x_1 = 0$ überwiegt. Denn das Integral lautet für $x_1 = 0$:

$$J_1(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta_1^3\,d\eta_1}{1+\eta_1^6} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\eta\,d\eta}{1+\eta^3} = \frac{1}{9}\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.2);$$

es ist also

$$\overline{q}_1(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi_1}{1+\xi_1^3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0{,}385,$$

was man übrigens auch unmittelbar durch elementare Integration bestätigen kann.

Man sieht aber auch, daß der oszillierende Anteil bei seinem ersten Minimum absolut genommen größer ist als das monoton fallende Integral; das Minimum liegt an der Stelle, wo die Ableitung $-\frac{1}{3}e^{-\frac{x_1}{2}\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{x_1}{2} + \cos\frac{x_1}{2}\right)$ zum ersten Male verschwindet, also bei $\frac{x_1}{2} = \frac{5}{6}\pi$, d. h.

$$x_1^{(1)} = \frac{5}{3}\pi = 5{,}23 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.3).$$

Der Betrag der Funktion an dieser Stelle ist

$$\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{6}\pi\sqrt{3}} = \frac{1}{3}e^{-4{,}54} = \underline{3{,}522 \cdot 10^{-3}}.$$

Für das Integral aber gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta_1 x_1}\eta_1^3}{1+\eta_1^6}\,d\eta_1 < \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\eta_1 x_1}\eta_1^3\,d\eta_1 = \frac{1}{\pi}\frac{6}{x_1^4} = \underline{2{,}56 \cdot 10^{-3}}.$$

Der oszillierende Anteil entscheidet also das Vorzeichen.

Die Lage der Nullstelle von $\overline{q}_1(x)$ läßt sich graphisch (d. h. näherungsweise) ermitteln; auch für diese graphische Auftragung des Verlaufes von $\overline{q}_1(x_1)$ ist die Zerlegung des Integrals (3.9) mit Hilfe des Residuensatzes sehr vorteilhaft. Denn die direkte Auswertung ist, auch abgesehen von grundsätzlichen Schwierigkeiten, für große x-Werte wegen der heftigen Oszillation des Integranden mit ξ sehr unbequem. Das Integral J_1 aber läßt sich gerade für große x sehr leicht mit Hilfe der Simpsonschen Regel für das Intervall zwischen 0 und einer geeignet gewählten oberen Grenze $a = a(x_1)$ auswerten, da der Beitrag, den $\int_a^\infty$ liefert, sehr klein ist. Man kann diesen Anteil übrigens (worauf hier nicht näher eingegangen werden soll) abschätzen, da er sich, wenn man $\frac{\eta_1^3}{1+\eta_1^6}$ näherungsweise ersetzt durch $\frac{1}{\eta_1^3}$, durch den Integrallogarithmus[8]) in geschlossener Form ausdrücken läßt.

Ein unmittelbarer Vergleich des Gesamt-Verhaltens der beiden Unterlagen ist, schon weil die Bettungsziffer K [kg/cm³] und die Elastizitätszahlen [kg/cm²] verschiedene Dimension haben, nicht möglich. Wohl aber kann man die beiden $q(x)$-Kurven in ihrem typischen Verlauf vergleichen, indem man z. B. auf gleiche Maximalspannung q_m bezieht.

[8]) Vgl. z. B. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, S. 78, Leipzig 1933.

Wenn wir die bei der Diskussion der Integrale unterdrückten Konstanten wieder einführen, so gilt:

$$\left.\begin{array}{l|l} q_1(x) = \dfrac{P'}{l_1}\,\bar{q}_1\left(\dfrac{x}{l_1}\right) & q_2(x) = \dfrac{P'}{2\sqrt{2}\,l_2}\,\bar{q}_2\left(\dfrac{x}{l_2}\right) \\ = \dfrac{P'}{l_1}\left[\dfrac{1}{3}\,e^{-\frac{x}{l_1}\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2\,l_1} + \sin\dfrac{x}{2\,l_1}\right) - J_1\right] & = \dfrac{P'}{2\sqrt{2}\,l_2}\,e^{-\frac{x}{\sqrt{2}\,l_2}}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}\,l_2} + \sin\dfrac{x}{\sqrt{2}\,l_2}\right) \end{array}\right\} \quad (4.4).$$

(Das Resultat für q_2 befindet sich, wie es sein muß, in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen.) Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die Parameter l_1, l_2 ausdrücken durch das Verhältnis von Last P' zu Maximalspannung q_m in der Form:

$$l_1 = 0{,}385\,\frac{P'}{q_m} \quad \Big| \quad l_2 = 0{,}353\,\frac{P'}{q_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5).$$

Es wird also:

$$x = 0{,}385\,x_1\,\frac{P'}{q_m} \quad \Big| \quad x = 0{,}353\,x_2\,\frac{P'}{q_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.6).$$

In Abb. 2 ist daher $x_0 = x\,q_m/P'$

$$= 0{,}385\,x_1 \quad \Big| \quad = 0{,}353\,x_2$$

als Abzisse gewählt. Ordinate ist q/q_m

$$= q_1 \cdot \frac{l_1}{P' \cdot 0{,}385} \quad \Big| \quad = q_2 \cdot \frac{l_2}{P' \cdot 0{,}353}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x)\,d\,x = P'$ geht in diesem Koordinatensystem über in die (Kontroll-) Bedingung:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} q/q_m\,d\,x_0 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.7).$$

Für die Nullstellen ergibt die numerische Auswertung der Integrale (3.9):

$$x_1^* = 4{,}0 \quad \Big| \quad x_2^* = \frac{3\,\pi}{4}\sqrt{2}\,,$$

also

$$x_0^* = 4 \cdot 0{,}385 = 1{,}54 \quad \Big| \quad x_0^* = \frac{3\,\pi}{8} = 1{,}18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.8).$$

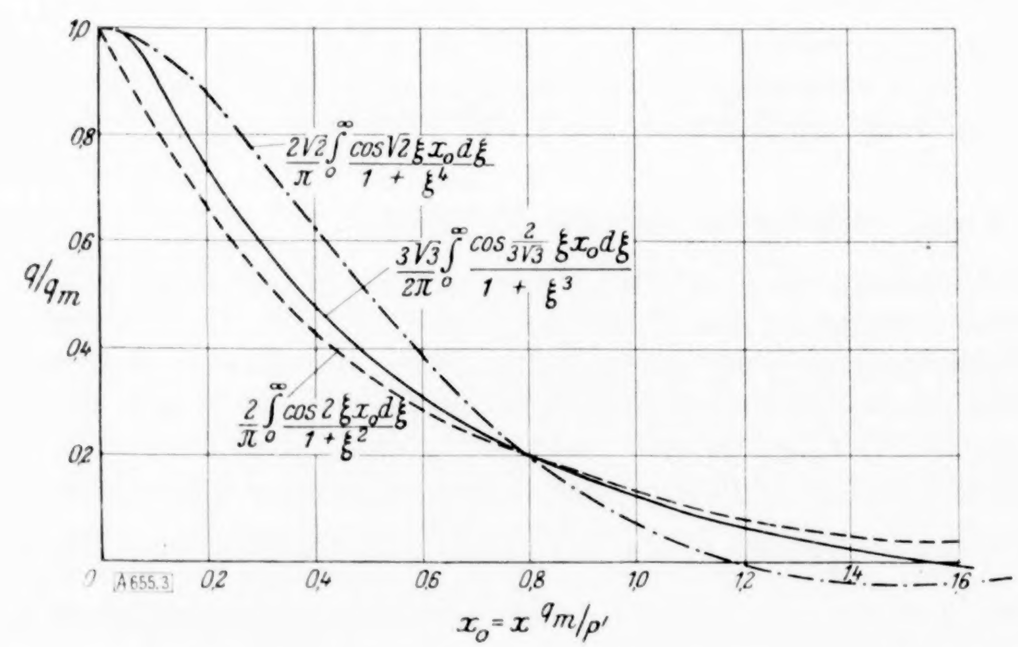


Abb. 2. Verlauf der Normal-Pressung bei elastischem ——— und bei nachgiebigem — · — · — Verhalten des Baugrundes.

In Abb. 2 ist der Vollständigkeit halber noch die nicht oszillierende Funktion

$$\frac{q_3}{q_m} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos 2\,x_0\,\xi}{1+\xi^2}\,d\,\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\,i\,x_0\,\xi}\,d\,\xi}{1+\xi^2} = \begin{cases} e^{-2x_0}\,(x_0 \geq 0) \\ e^{+2x_0}\,(x_0 \leq 0) \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (4.9)$$

aufgenommen. Der Faktor 2 im Exponenten ergibt sich aus der Forderung (4.7), der die Funktion q_3, wenn sie vernünftigerweise vergleichbar sein soll, genügen muß.

Der oben rechnerisch nachgewiesene oszillatorische Charakter der Funktion (3.8), der unabhängig ist vom Verhältnis der elastischen Konstanten, läßt sich auch leicht physikalisch einsehen: Die Annahme verschwindender Schubspannung zwischen Balken und Unterlage, die auf den Maximalbetrag der Normalspannungen fast ohne Einfluß ist, beeinflußt den Verlauf entscheidend. Wenn keine Schubspannungen angreifen, müssen nämlich die Normalspannungen oszillieren, weil sie sonst den Balken als ganzen verbiegen würden: die „Enden" würden eine von Null verschiedene Neigung aufweisen (s. Abb. 3), was offensichtlich

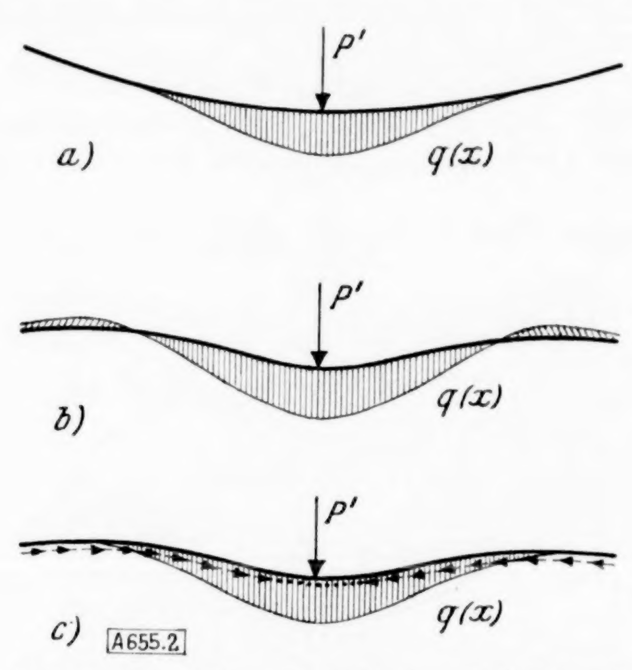


Abb. 3. Typischer Verlauf der Balkendurchbiegung unter Einzellast und elastischem Gegendruck: a, c) bei nichtoszillierendem Druck ohne und mit Rückbiegung infolge der Tangentialkräfte; b) bei oszillierendem Druck.

mit den Randbedingungen im Unendlichen in Widerspruch steht. Die Lösungen von Boussinesq und Michell[7]) für Halbraum und Halbebene aber zeigen, daß bei Anwesenheit von Schub die Normalspannungen nicht zu oszillieren brauchen.

5. Die Verschiebungen. Achsensymmetrisches Analogon. Die Normalverschiebungen des Balkens sind im Falle der nachgiebigen Unterlage mit Hilfe der Gl. (3.5) und (3.8) sofort angebbar:

$$w_2(x,0) = \frac{P'}{K}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \xi x \, d\xi}{1 + l_2^4 \xi^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.1).$$

Bei der Bestimmung der Einsenkungen, die der elastisch gelagerte Balken erleidet, stößt man auf die gleiche charakteristische Schwierigkeit, die die Michellsche Lösung für die Halbebene unter Einzellast bezeichnet[8]): die Verschiebung wird für große x-Werte logarithmisch unendlich. In unserem Fall äußert sich das formal darin, daß man ein nicht konvergierendes Integral erhält; aus den beiden letzten Gln. (3.5) ergibt sich nämlich $2M - \frac{m}{m-2}N = \frac{m-1}{m}\frac{Q(\xi)}{G_0}$, also:

$$w_1(x,0) = \frac{P'}{G_0}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\xi x)}{1 + l_1^3 \xi^3}\,\frac{d\xi}{\xi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.2).$$

Diese Schwierigkeit fällt beim achsensymmetrischen Analogon weg; dort findet man:

$$w_1(r,0) = \frac{P}{G_0}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\xi r)\, d\xi}{1 + l_1^3 \xi^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.3).$$

In diesem Falle lassen sich also auch die Einsenkungen in den beiden Fällen unmittelbar vergleichen. Dafür ist aber die numerische Auswertung mit Hilfe des Residuensatzes (Bestimmung des Verlaufes mit r) sehr erschwert, weil es für Real- und Imaginärteil der Besselschen

[7]) Vgl. z. B. Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität, S. 235 und 250, Leipzig 1907.

[8]) Vgl. z. B. Love-Timpe: A. a. O. S. 250.

(bzw. Hankelschen) Funktionen vom Argument $r\,(1/2 \pm i/2\sqrt{3})$ keine Tafeln gibt[10]). Da grundsätzliche Verschiedenheiten gegenüber dem ebenen Problem aber auch nicht zu erwarten sind, soll von dem Versuch eines zahlenmäßigen Vergleichs Abstand genommen werden.

Interessant ist dagegen der Vergleich der Maximal-Durchsenkungen und -Spannungen, die sich elementar errechnen lassen. Man erhält:

$$w_{1m} = w_1(0,0) = \frac{P}{G_0}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{1}{l_1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi_1}{1+\xi_1^3} = 0{,}385\,\frac{m-1}{m}\cdot\frac{P}{2\,G_0\,l_1},$$

wegen $G_0 = \frac{\delta^3}{6\,l_1^3}\,G$ also:

$$w_{1m} = 1{,}15\cdot\frac{m-1}{m}\,\frac{l_1^2}{\delta^3}\,\frac{P}{G},$$

ferner:

$$q_m = \frac{P}{l_1^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\xi_1\,d\xi_1}{1+\xi_1^3} = 0{,}385\cdot\frac{P}{2\,l_1^2}$$

$$w_{2m} = w_2(0,0) = \frac{P}{K}\,\frac{1}{l_2^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\xi_2\,d\xi_2}{1+\xi_2^4} = \frac{1}{8}\cdot\frac{P}{K\,l_2^2},$$

wegen $K = \frac{\delta^3}{12\,l_2^4}\cdot E'$ also:

$$w_{2m} = \frac{3}{4}\,\frac{m-1}{m}\cdot\frac{l_2^2}{\delta^3}\cdot\frac{P}{G} \quad . \quad . \quad (5.4),$$

ferner:

$$q_m = \frac{P}{l_2^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\xi_2\,d\xi_2}{1+\xi_2^4} = 0{,}25\,\frac{P}{2\,l_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.5).$$

Eliminiert man die Parameter l aus den Gl. (5.4) und (5.5), so ergibt sich:

$$q_{m1} = \frac{1}{w_{1m}}\cdot 0{,}221\cdot\frac{m-1}{m}\,\frac{P^2}{G\,\delta^3} \qquad\Big|\qquad q_{m2} = \frac{1}{w_{2m}}\cdot 0{,}094\cdot\frac{m-1}{m}\,\frac{P^2}{G\,\delta^3} \quad . \quad . \quad . \quad (5.6).$$

Bezogen auf gleiche Maximal-Durchsenkung w_m ist also der Maximaldruck beim elastischen Halbraum über doppelt so groß wie beim nachgiebigen. Umgekehrt verteilt sich also die Pressung über den elastischen Halbraum sehr viel weniger weit.

6. Die maximalen Biegespannungen. Von besonderem praktischem Interesse ist der Vergleich der maximalen Biegespannungen in der Fundamentplatte, wie sie sich aus den beiden Hypothesen über Verhalten des Baugrundes ergeben. Die größten Spannungen an Ober- und Unterseite der Platte ergeben sich nach

$$\sigma_m = G\,\frac{m}{m-1}\,w''\,\delta = \frac{E'}{2}\cdot w''\,\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.0)$$

(ebener Fall) aus den Gln. (5.1) bzw. (5.2) in einfacher Weise:

$$\sigma_m(x) = P'\cdot\frac{G}{G_0}\cdot\frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi x\,\xi\,d\xi}{1+l_1^3\,\xi^3} = \frac{P'\,\delta}{l_1^2}\cdot\frac{G}{G_0}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi_1 x_1\,\xi_1\,d\xi_1}{1+\xi_1^3}$$

$$\sigma_m(x) = P'\,\frac{E'}{2\,K}\,\frac{\delta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi x\,\xi^2\,d\xi}{1+l_2^4\,\xi^4} = \frac{P'\,\delta}{l_2^2}\,\frac{E'}{K\,l_2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\xi_2 x_2\,\xi_2^2\,d\xi_2}{1+\xi_2^4} \qquad (6.1).$$

Wegen der Gl. (3.7) ist daher das absolute Maximum (für $x=0$) gegeben durch:

$$\sigma_m = \frac{P'}{\delta}\,\frac{6\,l_1}{\delta}\,0{,}385 = \frac{2{,}31\,P'\,l_1}{\delta^2} \qquad\Big|\qquad \sigma_m = \frac{P'}{\delta}\,\frac{6\,l_2}{\delta}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2{,}12\,P'\,l_2}{\delta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.2).$$

Führt man an Stelle der Parameter l wieder das Verhältnis zwischen Last und größter Normalspannung q_m nach Gl. (4.5) ein, so erhält man:

$$\sigma_m = 0{,}89\cdot\frac{P'^2}{\delta^2\,q_m} \qquad\Big|\qquad \sigma_m = 0{,}75\cdot\frac{P'^2}{\delta^2\cdot q_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.3).$$

Die gefährliche Biegespannung im Fundament liegt also bei elastischer Unterlage um rd. 20% höher als bei nachgiebiger, wenn die maximale Pressung in beiden Fällen als gleich angenommen wird.

[10]) Betr. das Argument $r\,(1+i)$ vgl. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, S. 296 ff., Leipzig 1933.

Im achsensymmetrischen Fall wachsen die Biegespannungen unter der Last über alle Grenzen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{P}{G_0}\frac{m-1}{m}\frac{1}{l_1^3}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\xi_1^2\,d\xi_1}{1+\xi_1^3} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{P}{K}\cdot\frac{1}{l_2^4}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\xi_2^3\,d\xi_2}{1+\xi_2^4}.$$

Es ist aber interessant, daß das Verhältnis beider Ausdrücke unabhängig von allen physikalischen Konstanten den Wert 1 hat.

Zum Schluß mag die Gl. (6.3) noch mit den Ergebnissen einer für technische Zwecke meist ausreichenden Näherungsrechnung verglichen werden. Ersetzt man den Einfluß der Bettung auf die Biegespannungen durch den einer verteilten Dreieckslast von gleicher Gesamtintensität $(\int_{-l}^{l} q(x)\,dx=q_m\cdot l=P')$ (vgl. Abb. 4), so erhält man für das Maximalmoment $M_{\max}=q_m\cdot l^2/6$, also für σ_m:

$$\sigma_m=q_m\cdot\frac{l^2}{\delta^2}=P'\cdot\frac{l}{\delta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.4).$$

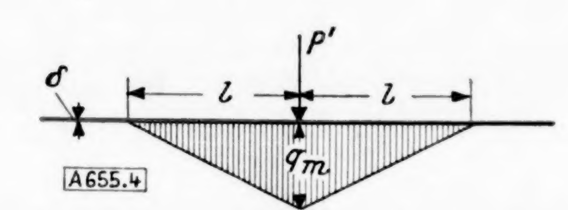


Abb. 4. Ersatz der Bodenpressung nach Abb. 3 durch eine Dreieckslast.

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung für die vertikale Richtung läßt sich l durch $q_{\max}=q_m$ ausdrücken, und man findet:

$$\sigma_m=\frac{P'^2}{\delta^2 q_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.5),$$

ein Ergebnis also, das größenordnungsmäßig vernünftig ist und außerdem auf der sicheren Seite liegt.

In den Anwendungen wird allerdings q_m ebensowenig unmittelbar bekannt sein wie l; man kennt nur (meist auch sehr näherungsweise) den Modul E_0 bzw. die Bettungsziffer K, d. h. in unserer Schreibweise die Parameter l_1 und l_2. Wählt man nun nach Gl. (4.6)

$$l=4{,}0\cdot l_1, \quad \Bigg| \quad l=\frac{3\pi}{4}\sqrt{2}\,l_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.6),$$

d. h. ersetzt man die Kurven der Abb. 2 durch Dreicke von der Basis $2x^*$, so kommt:

$$\sigma_m=4{,}0\frac{P'\,l_1}{\delta^2} \quad \Bigg| \quad \sigma_m=3{,}33\frac{P'\,l_2}{\delta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.7).$$

Vergleich mit Gl. (6.2) zeigt, daß auf diese Weise die Näherungsrechnung, vor allem für die elastische Unterlage, zu ungünstige Ergebnisse liefert. Gl. (6.5), die sich auf gleiche Höhe q_m des Dreiecks bezieht, ist besser, wenn auch der für wirklichen Baugrund zu wählende Zahlenwert wohl genauer zwischen 0,80 und 0,85 liegt.

7. Zusammenfassung. Ein durch eine Einzelkraft belasteter langer Träger ruhe auf einem nicht-starren Baugrund. Es wird der Verlauf der Pressungen zwischen Träger und Unterlage, wie er sich aus den beiden Annahmen „elastischen" (Hooke) und „nachgiebigem" ($\sigma_z\sim w$) Verhalten des Baugrundes ergibt, (die unmittelbare Gegenüberstellung der Auswirkungen beider Hypothesen ist die hauptsächlichste — methodische — Absicht der vorliegenden Veröffentlichung) bestimmt, ferner die Maxima der Einsenkungen und der Biegespannungen (ebener und achsensymmetrischer Fall). Insbesondere zeigt sich, daß die Normalspannungen in beiden Fällen oszillierend abklingen, nur befindet sich im Falle elastischen Verhaltens des Baugrundes die erste Nullstelle in größerem Abstand vom Lastpunkt, und die Spannungen entgegengesetzten Zeichens sind viel weniger ausgeprägt. — Der physikalische Grund für das oszillatorische Verhalten ist die Annahme verschwindenden Schubes zwischen Träger und Baugrund.

Über die Knickung eines Balkens durch Längskräfte.

Dem Andenken an Erich Trefftz gewidmet.

Von *Otto Blumenthal* in Aachen.

Im Jahre 1898 hat L. Vianello[1]) ein Näherungsverfahren angegeben, um die Knicksicherheit eines durch ein System von an verschiedenen Stellen angreifenden Längskräften beanspruchten Balkens festzustellen. Man geht aus von einer wahrscheinlichen Form der Biegungslinie und unterwirft diese einem Iterationsverfahren. Die überzeugende Kraft von Vianellos Abhandlung liegt in einer Reihe durchgeführter Beispiele, bei denen sich herausstellt, daß das Verfahren auch bei recht roher Ausgangskurve in ganz wenigen Schritten zum Ziel führt. Demgegenüber möchte ich hier zeigen, daß dem Verfahren nicht unbedingt getraut werden kann, daß es nämlich in gewissen, nicht trivialen Fällen entweder schlecht konvergieren oder sogar zu verkehrten Resultaten führen kann, die eine wesentlich höhere Knicksicherkeit liefern, als der Balken tatsächlich besitzt. Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, liegt dies daran, daß unter Umständen die dem kleinsten Knickwert entsprechende Biegungslinie eine unerwartete Gestalt hat.

Diesen Beweis führe ich in § 2 an einem Beispiel. Im § 3 entwickele ich dagegen einige hinreichende Kriterien für die Anwendbarkeit des Verfahrens, die Vianellos Beispiele in der Hauptsache decken. Zum Verständnis muß ich in § 1 die von E. Trefftz[2]) entwickelte Theorie der Erscheinung vorausschicken, die auf einer linearen Integralgleichung beruht. Ich kann dabei die Trefftzschen Entwicklungen ein wenig abkürzen.

§ 1. Zurückführung der Aufgabe auf eine Integralgleichung. Der Balken habe die Endpunkte 0 und l, die Abszisse sei mit s, die Ordinate der Biegungslinie mit y bezeichnet[3]). Die Verteilung der Längskräfte wird nach dem Vorbild von Trefftz stetig angenommen, von der Dichte $p(s)$, wobei positives $p(s)$ im Sinne wachsender s gerichtet sei, außerdem wirke eine stetige Querbelastung von der Dichte $q(s)$[4]). Auch Elastizitätsmodul E und Trägheitsmoment J können wir, ohne Komplikationen einzuführen, als stetige Funktionen der Abszisse voraussetzen, sie sind überall positiv. Das Biegemoment sei $m(s)$. Als Randbedingung werde an jedem der beiden Enden eine der folgenden 4 „natürlichen" zugelassen:

a) Stützung: $y = m = 0$,
b) Einspannung: $y = y' = 0$,
c) freies Ende: $m = m' = 0$[5]),
d) Einspannung in eine in senkrechter Richtung verschiebliche Backe: $y' = m' = 0$.

Sei $M(s, t)$ das von der am Punkt t angreifenden senkrechten Einzellast 1 am Punkte s bei den gegebenen Randbedingungen hervorgerufene Biegungsmoment. Es ist

$$M(s,t)\begin{cases} = M_0 - Q_0\, s & s \leqq t \\ = M_0 - Q_0\, s - (s-t) & s \geqq t \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1,1),$$

wo M_0 und Q_0 Einspannungsmoment und Stützkraft am Punkte 0 bezeichnen. $M(s, t)$ ist also eine stückweise lineare Funktion von s. Kombinieren wir also

$$\frac{d^2 y}{d s^2} = -\frac{m(s)}{E J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1,2)$$

mit

$$\frac{d^2 M(s,t)}{d s^2} = 0 \qquad s \neq t\,,$$

so erhalten wir nach dem bekannten Verfahren des Greenschen Satzes

$$\left(M(s,t)\frac{d y}{d s} - y\frac{d M(s,t)}{d s}\right)\Bigg|_0^t + \left(M(s,t)\frac{d y}{d s} - y\frac{d M(s,t)}{d s}\right)\Bigg|_t^l = -\int_0^l \frac{m}{E J} M(s,t)\, d s$$

[1]) ZVDI 42 (1898), S. 1436 bis 1443. Das Verfahren wird auch anderwärts benutzt, siehe z. B. E. Pohlhausen: Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke, ZAMM 1 (1921), S. 34 bis 42.

[2]) ZAMM 3 (1923), S. 272 bis 275.

[3]) Zwischenstützen, die Trefftz zuläßt, lassen wir zur Vereinfachung der Formeln weg.

[4]) In der Voraussetzung stetiger Dichten $p(s)$ und $q(s)$ sei eingeschlossen, daß an den beiden Enden keine konzentrierten Kräfte wirken. Das vereinfacht einen Schluß. Die Endformel (1,6) gilt aber, wie man durch Grenzübergang zu konzentrierten Kräften leicht zeigt, ohne jede Einschränkung der angreifenden Kräfte.

[5]) $m' = 0$ kommt heraus, weil nach unserer Voraussetzung (Fußnote [4])) an den Enden keine konzentrierten Längskräfte auftreten.

und daher, weil die Randglieder wegfallen und weil nach (1,1)

$$\left(\frac{d\,M(s,t)}{d\,s}\right)_{t-}-\left(\frac{d\,M(s,t)}{d\,s}\right)_{t+}=1$$

ist,

$$y(t)=\int_0^l \frac{m(s)}{E\,J(s)}\,M(s,t)\,d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,3).$$

Andererseits berechnen wir, unter Berücksichtigung von Fußnote [4]), das Moment $m(s)$ aus den Längs- und Querkräften (m_0 Einspannungsmoment am Ende 0):

$$m(s)=m_0+\int_0^s \{y(s)-y(\sigma)\}\,p(\sigma)\,d\sigma-\int_0^s (s-\sigma)\,q(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Daraus folgt:

$$m''(s)=\frac{d}{d\,s}(y'(s)\,P(s))-q(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,4)$$

mit

$$P(s)=\int_0^s p(\sigma)\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,4').$$

Da aber bekanntlich $-m''(s)$ diejenige Dichte der Querbelastung ist, die das Biegemoment $m(s)$ hervorruft, so ergibt sich aus dem Prinzip der Addition der Querbelastungen

$$m(s)=-\int_0^l m''(t)\,M(s,t)\,d\,t=-\int_0^l \frac{d}{d\,t}(y'(t)\,P(t))\,M(s,t)\,d\,t+\int_0^l q(t)\,M(s,t)\,d\,t\,.$$

Das letzte Integral ist das von der gegebenen Querbelastung herrührende Moment $m_q(s)$. Das erste Integral wird durch Produktintegration umgeformt, wobei die ausintegrierten Glieder wegen $P(0)=P(l)=0$ (siehe Fußnote [4])) verschwinden. Also resultiert

$$m(s)=\int_0^l y'(t)\,P(t)\frac{\partial\,M(s,t)}{\partial\,t}\,d\,t+m_q(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,5).$$

Setzen wir hierin für $y'(t)$ den Wert aus (1,3) ein, so kommt

$$\left.\begin{aligned} m(s)&=m_q(s)+\int_0^l P(t)\frac{\partial\,M(s,t)}{\partial\,t}\,d\,t\int_0^l \frac{m(r)}{E\,J(r)}\frac{\partial\,M(r,t)}{\partial\,t}\,d\,r\\ &=m_q(s)+\int_0^l \frac{m(r)}{E\,J(r)}\,d\,r\int_0^l P(t)\frac{\partial\,M(s,t)}{\partial\,t}\frac{\partial\,M(r,t)}{\partial\,t}\,d\,t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,6).$$

Dies ist für $m(s)$ eine lineare Integralgleichung mit symmetrisierbarem Kern. In der Tat, führen wir die neue Funktion

$$n(s)=\frac{m(s)}{\sqrt{E\,J(s)}}$$

ein, so genügt diese der Integralgleichung

$$n(s)=\frac{m_q(s)}{\sqrt{E\,J(s)}}+\int_0^l n(r)\,G(r,s)\,d\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,7)$$

mit dem symmetrischen Kern

$$G(r,s)=\frac{1}{\sqrt{E\,J(r)\,E\,J(s)}}\int_0^l P(t)\frac{\partial\,M(s,t)}{\partial\,t}\frac{\partial\,M(r,t)}{\partial\,t}\,d\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,7').$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen genügen den Gleichungen

$$\psi_i(s)=\lambda_i\int_0^l \psi_i(r)\,G(r,s)\,d\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1,8),$$

wobei die λ_i nach der Größe ihrer Beträge numeriert sein sollen.

Das Vianellosche Verfahren besteht darin, daß man, ausgehend von einer plausibelen Momentenlinie $n^{(0)}(s)$, die ihrerseits aus einer plausibelen Biegungslinie $y^{(0)}(s)$ gewonnen wird, das Iterationsverfahren anwendet:

$$\left.\begin{array}{l} n^{(1)}(s)=\int_0^l n^{(0)}(r)\,G(r,s)\,dr, \qquad n^{(2)}(s)=\int_0^l n^{(1)}(r)\,G(r,s)\,dr=\int_0^l n^{(0)}(r)\,G^{(2)}(r,s)\,dr, \\ n^{(3)}(s)=\int_0^l n^{(2)}(r)\,G(r,s)\,dr=\int_0^l n^{(0)}(r)\,G^{(3)}(r,s)\,dr,\ldots \end{array}\right\} \quad (1,9),$$

wo $G^{(k)}(r,s)$ den k^{ten} iterierten Kern bezeichnet. Es habe nun die Ausgangsfunktion in den Eigenfunktionen ψ die (formale) Darstellung

$$n^{(0)}(s)=c_i\,\psi_i(s)+c_{i+1}\,\psi_{i+1}(s)+\cdots \quad (1,10'),$$

womit ausgedrückt wird, daß die ersten Koeffizienten $c_1,\ldots,c_{i-1}$ verschwinden können. Wir wollen außerdem, um ganz allgemein zu bleiben, annehmen, daß $\psi_i(s)$ und $\psi_{i+1}(s)$ zum gleichen Eigenwert λ_i gehören[6]). Dann wird

$$n^{(k)}(s)=\frac{c_i\,\psi_i(s)+c_{i+1}\,\psi_{i+1}(s)}{\lambda_i^{\,k}}+c_{i+2}\,\frac{\psi_{i+2}(s)}{\lambda_{i+2}^{\,k}}+\cdots \quad (1,10).$$

Ist jetzt $|\lambda_i|<|\lambda_{i+2}|$, so ist das Iterationsverfahren (1,9) konvergent und ergibt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n^{(k)}(s)}{n^{(k+1)}(s)}=\lambda_i \quad (1,10''),$$

während gleichzeitig $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^{\,k}\,n^{(k)}(s)=c_i\,\psi_i(s)+c_{i+1}\,\psi_{i+1}(s)$, bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{E\,J(s)}}$, die Momentenlinie für eine mögliche Knickfigur des Balkens darstellt. Die Bedingung $|\lambda_i|<|\lambda_{i+2}|$ ist sicher erfüllt in dem wichtigsten Fall, wenn $P(t)$ sein Vorzeichen nicht wechselt, also über den ganzen Balken weg entweder nur Druck oder nur Zug herrscht. Dann ist nämlich der Kern $G(r,s)$ nach Trefftz (S. 274) definit (bei Druck positiv definit) und hat also nur Eigenwerte eines Vorzeichens. Bestehen aber Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens, so können wir die Konvergenz des Iterationsverfahrens unter allen Umständen dadurch erzwingen, daß wir zum iterierten Kern $G^{(2)}(r,s)$ übergehen, d. h. nur die Funktionenfolge $n^{(0)}(s), n^{(2)}(s),\ldots, n^{(2k)}(s),\ldots$ betrachten. Es gilt immer

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n^{(k)}(s)}{n^{(k+2)}(s)}=\lambda_i^{\,2}.$$

Die gesuchte Knicksicherheit ist der kleinste positive Eigenwert. Sollte also für eine Verteilung $P(t)$ der Längskräfte ein positiver Eigenwert vorhanden, aber der absolut kleinste Eigenwert negativ sein, so ist das Vianellosche Verfahren im allgemeinen unbrauchbar. Aber diesen Fall wollen wir hier beiseite lassen. Es sei also λ_1 positiv. Dann ist eine evidente notwendige Bedingung für die Brauchbarkeit des Vianelloschen Verfahrens $i=1$, d. h. die Ausgangskurve $n^{(0)}(s)$ muß Komponenten nach den zum ersten Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen aufweisen. Darüber hinaus müssen, damit das Verfahren rasch konvergieren soll, diese Komponenten verhältnismäßig groß sein.

Da das Fehlen dieser Komponenten in $n^{(0)}(s)$ eine Ausnahmeerscheinung sein wird, kann man sagen, daß das Vianellosche Verfahren im allgemeinen den Knickwert liefert.

Eine große Schwierigkeit und Unsicherheit kommt aber dadurch herein, daß schon bei sehr einfachen Beispielen die üblichen anschaulichen Merkmale dafür, daß $n^{(0)}$ die erste Komponente überhaupt oder genügend stark enthält, völlig versagen können. Dies soll im folgenden erörtert werden. Die Methode Vianellos verliert dadurch nach meiner Auffassung erheblich an praktischem Wert.

§ 2. Ein Beispiel, in dem das Vianellosche Verfahren versagt. An dem in den Punkten 0 und l gestützten Stab von unveränderlichem EJ greife im Punkte a die Längskraft $+P$, im Punkte $b\,(>a)$ die Längskraft $-P$ an. Die Ordinaten der Biegungslinie an den Punkten a und b seien mit α und β bezeichnet (Abb. 1, S. 237). Dann findet man für die Momente

$$\text{Feld I} \qquad (0\leq s\leq a) \qquad M_1=-P\,\frac{\beta-\alpha}{l}\,s,$$

[6]) E. Trefftz hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß mehr als 2 orthogonale Eigenfunktionen zu einem Eigenwert nicht existieren können, weil sie Integrale einer linearen homogenen Integralgleichung 4. Ordnung sind. Daß andererseits 2 Eigenfunktionen zu einem Eigenwert wirklich auftreten, beweist ein Beispiel des § 2.

Feld II $(a \leqq s \leqq b)$ $\quad M_{II} = -P\frac{\beta-a}{l}s + P(y-a) = P\frac{\beta-a}{l}(l-s) + P(y-\beta)$

$$= -P\frac{\beta-a}{l}\left(s-\frac{l}{2}\right) + P\left(y-\frac{a+\beta}{2}\right),$$

Feld III $(b \leqq s \leqq l)$ $\quad M_{III} = P\frac{\beta-a}{l}(l-s)$.

Berücksichtigt man die Randbedingungen $y(0) = y(l) = 0$ und benutzt für Feld II der Symmetrie halber die letztangegebene Form des Momentes, so ergeben sich mit der Abkürzung $\frac{P}{EJ} = \nu^2$ die Gleichungen der Biegungslinie:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Feld I} && y_I(s) = \nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{s^3}{6} + A\,s,\\
&\text{Feld II} && y_{II}(s) - \frac{a+\beta}{2} = \frac{\beta-a}{l}\left(s-\frac{l}{2}\right) + B\cos\nu\left(s-\frac{a+b}{2}\right) + C\sin\nu\left(s-\frac{a+b}{2}\right),\\
&\text{Feld III} && y_{III}(s) = -\nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{(l-s)^3}{6} - D(l-s)
\end{aligned}\right\} \quad (2{,}0).$$

Die Integrationskonstanten A, B, C, D bestimmen sich aus den Bedingungen

$$y_I(a) = y_{II}(a) = a, \qquad y_{II}(b) = y_{III}(b) = \beta.$$

Wir erhalten:

$$A = \frac{a}{a} - \nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{a^2}{6} \quad . \quad . \quad (2{,}11), \qquad D = -\frac{\beta}{l-b} - \nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{(l-b)^2}{6} \quad (2{,}12)$$

$$B\cos\nu\frac{b-a}{2} = (\beta-a)\frac{l-(b+a)}{2l} \quad . \quad (2{,}21), \qquad C\sin\nu\frac{b-a}{2} = (\beta-a)\frac{l-(b-a)}{2l} \quad . \quad . \quad (2{,}22).$$

Die Gleichungen für stetigen Übergang der Tangente, $y'_I(a) = y'_{II}(a)$ und $y'_{II}(b) = y'_{III}(b)$, lauten nach Einsetzen aus (2,11), (2,12)

$$\nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{a^2}{3} + \frac{a}{a} = \frac{\beta-a}{l} + B\nu\sin\nu\frac{b-a}{2} + C\nu\cos\nu\frac{b-a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}23),$$

$$\nu^2\frac{\beta-a}{l}\frac{(l-b)^2}{3} - \frac{\beta}{l-b} = \frac{\beta-a}{l} - B\nu\sin\nu\frac{b-a}{2} + C\nu\cos\nu\frac{b-a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}24).$$

Die vier Gl. (2,2) sind homogene lineare Gleichungen für die Unbekannten B, C, a, β, aus denen sich durch Elimination die Gleichung für ν ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
F(\nu) = {} & 2 + \left(\frac{a}{l-b} + \frac{l-b}{a}\right)\cos\nu(b-a)\\
& + \left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-b} + \frac{l}{a(l-b)}\right) - \frac{\nu}{3}\left(\frac{a^2}{l-b} + \frac{(l-b)^2}{a}\right)\right]\sin\nu(b-a) = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (2{,}3).$$

Wir suchen die kleinste Wurzel ν, d. i. den Knickwert.

S e i z u n ä c h s t $a \neq l-b$. D a n n g i b t e s g e n a u e i n e W u r z e l ν, d i e $< \frac{\pi}{b-a}$ i s t. In der Tat ist $F(0)$ positiv, dagegen

$$F\left(\frac{\pi}{b-a}\right) = 2 - \left(\frac{a}{l-b} + \frac{l-b}{a}\right) < 0 \qquad (\text{wegen } a \neq l-b).$$

Also ist mindestens eine Wurzel in dem Intervall vorhanden. Um zu zeigen, daß nur eine da sein kann, genügt der Nachweis, daß an jeder Nullstelle dieses Intervalls die Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\nu} = {} & -\left[\left(\frac{a}{l-b} + \frac{l-b}{a}\right)(b-a) + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-b} + \frac{l}{a(l-b)}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{l-b} + \frac{(l-b)^2}{a}\right)\right]\sin\nu(b-a)\\
& + \left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-b} + \frac{l}{a(l-b)}\right) - \frac{\nu}{3}\left(\frac{a^2}{l-b} + \frac{(l-b)^2}{a}\right)\right](b-a)\cos\nu(b-a)
\end{aligned}$$

negativ ist. In der Tat, setzen wir die positive Größe

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-b} + \frac{l}{a(l-b)}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{l-b} + \frac{(l-b)^2}{a}\right) = p$$

und beachten, daß der Koeffizient von $\cos\nu(b-a)$ bis auf den Faktor $(b-a)$ mit dem Koeffizienten von $\sin\nu(b-a)$ in $F(\nu)$ übereinstimmt, so erhalten wir durch Elimination dieses Koeffizienten vermöge $F(\nu)=0$ nach kurzer Rechnung

$$\frac{dF}{d\nu}=-(b-a)\left[\frac{a}{l-b}+\frac{l-b}{a}+2\cos\nu(b-a)\right]\frac{1}{\sin\nu(b-a)}-p\sin\nu(b-a)<0\,.$$

Verwickelter liegen die Verhältnisse für $a=l-b$ („symmetrische Beanspruchung"). Hier ist immer $\nu=\frac{\pi}{b-a}$ eine Wurzel von $F(\nu)=0$. Es kann höchstens eine noch kleinere Wurzel geben. Ob eine solche auftritt oder nicht, hängt von dem Werte von a ab. Wir geben die Diskussion genau, weil sich an sie das einfachste Beispiel für Versagen des Vianelloschen Verfahrens anknüpft.

Die Gleichung für ν lautet:

$$\left.\begin{aligned}0&=2+2\cos\nu(l-2a)+\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{2}{a}+\frac{l}{a^2}\right)-\frac{2\nu a}{3}\right)\sin\nu(l-2a)\\&=4\cos\nu\left(\frac{l}{2}-a\right)\left[\cos\nu\left(\frac{l}{2}-a\right)+\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{2a^2}\right)-\frac{\nu a}{3}\right)\sin\nu\left(\frac{l}{2}-a\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2{,}4).$$

Der zweite Faktor ist für $\nu=0$ positiv und hat für $\nu=\frac{\pi}{b-a}=\frac{\pi}{l-2a}$ den Wert

$$\left.\begin{aligned}\frac{l-2a}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{l}{2a^2}\right)-\frac{\pi}{l-2a}\frac{a}{3}&=\frac{1}{2\pi a^2(l-2a)}\left(l^3-2l^2a-4la^2+\left(8-\frac{2\pi^2}{3}\right)a^3\right)\\&=\frac{1}{2\pi a^2(l-2a)}f(a)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2{,}5).$$

$f(a)$ nimmt in dem in Betracht kommenden Intervall $0<a<\frac{l}{2}$ ständig ab und geht von positiven zu negativen Werten über. Die Nullstelle liegt bei

$$a_0=0{,}3193\,l.$$

Ist bei symmetrischer Beanspruchung das gedrückte Stabstück verhältnismäßig groß ($a<a_0$), dann ist der Knickwert $\nu=\frac{\pi}{l-2a}$. Ist aber das gedrückte Stabstück klein ($a>a_0$), dann existiert ein Knickwert $\nu_0<\frac{\pi}{l-2a}$. Für $a=a_0$ hat $F(\nu)=0$ die Doppelwurzel $\nu=\frac{\pi}{2l-a_0}$.

Wir werden nun zeigen, und darin besteht unser erstes Beispiel: Die zu dem Knickwert ν_0 gehörige Biegungslinie ist merkwürdigerweise nicht symmetrisch zur Achse $s=\frac{l}{2}$, sondern hat bei $s=\frac{l}{2}$ eine Nullstelle. Die symmetrische (konkave) Biegungslinie gehört zu $\nu=\frac{\pi}{l-2a}$.

In der Tat, sei zunächst $\nu=\frac{\pi}{l-2a}$. Setzen wir in (2,24) $l-b=a$ und addieren zu (2,23), so erhalten wir wegen $\cos\nu\frac{b-a}{2}=0$

$$(\beta-\alpha)\left(\frac{2\nu^2a^2}{3l}-\frac{1}{a}-\frac{2}{l}\right)=-\frac{1}{l\,a\,(l-2a)^2}(\beta-\alpha)f(a)=0\,,$$

d. h. $\beta=\alpha$, außer wenn $a=a_0$, also $\nu=\frac{\pi}{l-2a}$ Doppelwurzel ist. Ist aber $\beta=\alpha$, d. h. greifen die beiden Druckkräfte in gleicher Höhe an, dann besteht (Gl. (2,0)) die Biegungslinie aus 2 zur Achse $s=\frac{l}{2}$ symmetrischen Geradenstücken und einem zu dieser Achse symmetrischen konkaven Stück einer cos-Linie, ist also konkav.

Ist dagegen $\nu=\nu_0<\frac{\pi}{l-2a}$, dann ist $\cos\nu\frac{b-a}{2}\neq 0$ und daher bei $l-b=a$ nach (2,21) $B=0$. Daher ergibt Subtraktion der Gl. (2,23) und (2,24) $\alpha+\beta=0$. Demnach schneidet die Biegungslinie die s-Achse, und die Gl. (2,0) zeigen genauer, daß sie den Punkt $s=\frac{l}{2}$, $y=0$ zum Symmetriezentrum hat.

Für $a = a_0$ bestehen Biegungslinien der beiden Typen gleichzeitig. Diese zeigt die Abb. 1[7]).

Die Momentenkurven haben die gleichen Symmetrie-Eigenschaften wie die Biegungslinien. Insbesondere ist die zu ν_0 gehörige Momentenkurve nicht überall positiv, sondern hat eine Nullstelle bei $\frac{l}{2}$. Dagegen ist die zu $\nu = \frac{\pi}{l - 2a}$ zugehörige Momentenkurve nirgends negativ.

Daraus folgt: Für $a > a_0$ wird das Vianellosche Verfahren, wie man es „vernünftiger" Weise anwendet, unbrauchbar. Denn man benutzt als Ausgangskurve für die Biegungslinie immer eine konkave Kurve, in der Erwartung, daß der kleinste ν-Wert einer konkaven Biegungslinie entsprechen werde. Diese Erwartung ist aber für $a > a_0$ falsch. Geht man insbesondere von der genauen konkaven Biegungslinie aus, die $\nu = \frac{\pi}{l - 2a}$ entspricht, so führt das Verfahren immer wieder auf diese Linie zurück und liefert den ν-Wert $\frac{\pi}{l - 2a}$, der nicht der Knickwert, sondern zu groß ist. Geht man von einer anderen konkaven Biegungslinie aus, dann kann die Zerlegung ihrer Momentenkurve nach den Eigenfunktionen auch die zu ν_0 gehörige Eigenfunktion als Komponente enthalten, aber jedenfalls als kleine Komponente. In diesem Falle würde zwar — wie am Ende des § 1 gesagt — das Vianellosche Verfahren schließlich den richtigen Knickwert liefern, aber erst nach einem langen und praktisch undurchführbaren Prozeß.

Die Tatsache, daß die zum kleinsten Eigenwert gehörige Biegungslinie nicht konkav ist, erscheint zunächst verwunderlich. Man kann sie sich aber mechanisch anschaulich machen durch die Erklärung, daß das gedrückte Stück $(a, l - a)$, wenn es genügend klein ist, sich nicht ausbiegt, sondern als Ganzes querstellt.

Abb. 1.

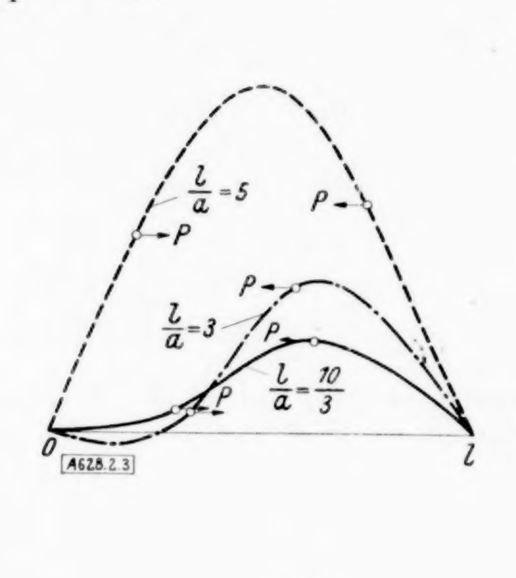


Abb. 2.

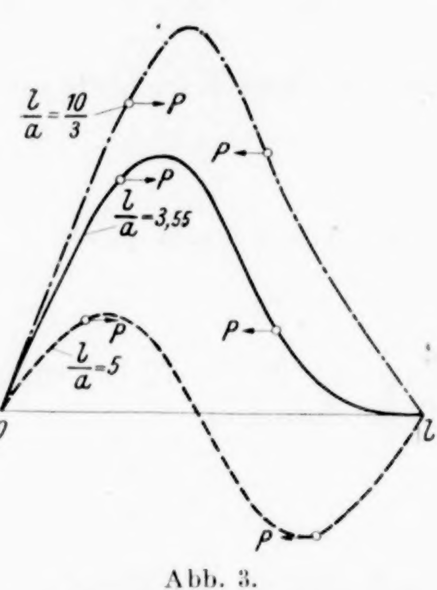


Abb. 3.

Die auffallenden Formen der Biegungslinien, die wir bei symmetrischer Beanspruchung festgestellt haben, treten auch bei unsymmetrischer Beanspruchung auf und sind hier sogar noch anschaulicher zu verfolgen. Vorauszuschicken ist, daß konkave Biegungslinien überhaupt nicht auftreten können, weil die Momente in den Feldern I und III entgegengesetzte Vorzeichen haben. Schon dies erschwert die Anwendung des Vianelloschen Verfahrens. Es zeigt sich aber darüber hinaus, daß die zum 1. Eigenwert gehörige Biegungslinie eine Nullstelle haben kann. Wir erhalten so weitere Beispiele für Nichtanwendbarkeit des Vianelloschen Verfahrens. Sei nämlich das Verhältnis $\frac{l - b}{a} = q \neq 1$ fest gegeben. Bei kleinem a erhalten wir dann zunächst zum kleinsten Eigenwert $\nu_0 < \frac{\pi}{b - a}$ eine positive Biegungslinie mit endlichen Steigungswinkeln der Tangenten an den beiden Enden. Mit wachsendem a aber nimmt die Neigung der einen dieser beiden Tangenten zu Null ab. Für einen Wert $a = a_1$ entsteht eine Biegungslinie mit horizontaler Tangente an einem Ende, als ob der Stab dort eingespannt wäre. Mit weiter wachsendem a wechselt diese Tangente ihr Vorzeichen und es entsteht eine Biegungslinie, die auch negative Werte annimmt. Das Umgekehrte findet mit der zum zweiten Eigenwert $\nu_1 \left(\frac{\pi}{b - a} < \nu_1 < \frac{2\pi}{b - a}\right)$ zugehörigen Biegungslinie statt. Diese hat für kleine a eine Nullstelle und das Aussehen einer sin-Linie im Periodenintervall. Mit wachsendem a aber nimmt die Tangente an einem Ende — und zwar an dem entgegengesetzten wie vorher — ab, geht bei einem Werte a_2 durch Null und wechselt ihr Vorzeichen. Für Werte $a > a_2$ hat diese Biegungslinie keine Nullstelle mehr. Die zu ν_0 und ν_1 gehörigen Biegungslinien haben also ihren Typus für genügend großes a gerade vertauscht. Die Abb. 2 $(\nu = \nu_0)$ und 3 $(\nu = \nu_1)$ zeigen die Übergänge.

[7]) Wir haben hier das in § 1 angekündigte Beispiel, daß der erste Eigenwert mehrfach sein kann.

Ich führe den Beweis nur für den Eigenwert ν_0. Zur Aufstellung der Gleichung $F=0$ lassen sich hier, weil $\nu(b-a)<\pi$ ist, B und C aus (2,21) und (2,22) ausrechnen und in (2,23) und (2,24) einsetzen. Man erhält zwei homogene Gleichungen in α und β von folgender Gestalt:

$$\alpha\left(\frac{1}{a}+N\right)=\beta N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}61),$$

$$\alpha R \qquad =\beta\left(\frac{1}{l-b}+R\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}62),$$

aus denen sich $F=0$ in der Form ergibt

$$\frac{1}{a}\frac{1}{l-b}+\frac{1}{a}R+\frac{1}{l-b}N=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}7).$$

Dabei ist

$$N=\frac{1}{l}\left(1-\frac{a^2\nu^2}{3}\right)+\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{b+a}{l}\right)\operatorname{tg}\nu\frac{b-a}{2}+\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{b-a}{l}\right)\cot\nu\frac{b-a}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (2{,}71),$$

$$R=\frac{1}{l}\left(1-\frac{(l-b)^2\nu^2}{3}\right)-\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{b+a}{l}\right)\operatorname{tg}\nu\frac{b-a}{2}+\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{b-a}{l}\right)\cot\nu\frac{b-a}{2} \quad . \; . \quad (2{,}72).$$

Wir verlangen horizontale Tangente am linken Ende, d. i. $A=0$. Setzen wir in (2,11) gemäß (2,61)

$$\alpha=N, \qquad \beta=\frac{1}{a}+N, \qquad \beta-\alpha=\frac{1}{a}$$

ein, so folgt

$$N=\frac{\nu^2a^2}{6l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}81)$$

und daraus nach (2,7)

$$R=-\frac{1}{l-b}\left(1+\frac{\nu^2a^3}{6l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}82).$$

Dies in (2,71), (2,72) eingesetzt, ergibt unter Einführung der dimensionslosen Größen und Bezeichnungen

$$q=\frac{l-b}{a}, \qquad x=\nu a, \qquad z=\frac{l}{a}, \qquad \nu\frac{b-a}{2}=x\frac{z-(q+1)}{2}=\varphi \quad . \; . \quad (2{,}9)$$

nach kurzer Rechnung:

$$(q-1)\,x\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{q}\left\{z+\frac{x^2}{6}(-2q^3+3q+1)\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}91),$$

$$(q+1)\,x\cot\varphi=\frac{1}{q}\left\{-z-2q+\frac{x^2}{6}(2q^3+3q-1)\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}92),$$

und durch Multiplikation dieser transzendenten Gleichungen die algebraische:

$$\frac{x^4}{36}(9q^2-(2q^3-1)^2)+\frac{x^2}{3}(-q^4-q+z(2q^3-1))-z(z+2q)=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (2{,}93).$$

Gl. (2,91) zeigt, weil $\varphi<\frac{\pi}{2}$ ist, daß notwendig

$$q>1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}94)$$

sein muß. Wir wählen außerdem q so nahe bei 1, daß $-2q^3+3q+1$ und daher der Koeffizient von x^4 in (2,93) positiv ist, also $q<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Dann hat (2,93) für jedes positive z eine positive Wurzel x. Für z kommen nur Werte $>q+1$ in Betracht, für diese ist x eine ständig wachsende Funktion $x(z)$, die von der Größenordnung $\sqrt{z}$ unendlich wird[8]). Man denke sich diese Funktion in (2,91) eingetragen. Für $z=q+1$ verschwindet die linke Seite,

[8]) Der Beweis des zweiten Teils dieser Behauptung folgt einfach aus (2,93), der erste Teil ist für das Folgende unwesentlich, weshalb ich den Beweis weglasse. Die Bestimmung des Intervalls sämtlicher Werte q, für die eine horizontale Tangente auftreten kann, und die Berechnung der zugehörigen Werte a und ν (d. h. z und x) ist eine interessante algebraische Aufgabe, deren Lösung ich durchgeführt habe, aber hier unterdrücke.

die rechte ist positiv. Man lasse aber jetzt z wachsen, bis φ den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Dann ist die linke Seite größer als die rechte. Somit gibt es ein z, d. h. ein a, derart, daß die zugehörige, dem ersten Eigenwert $r_0 < \frac{\pi}{b-a}$ entsprechende Biegungslinie am linken Ende eine horizontale Tangente hat. Eine zusätzliche Betrachtung zeigt, daß die Tangente mit wachsendem a ihr Vorzeichen wechselt, denn $\frac{d(aA)}{dz}$ ergibt sich als positiv. Somit ist für Werte q $\left(1 < q < \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ unsere Behauptung bewiesen. Für die Abbildungen wurde $q = 1{,}25$ gewählt.

§ 3. Hinreichende Kriterien für Anwendbarkeit des Vianelloschen Verfahrens. Da, wie die Gegenbeispiele des § 2 zeigen, das Vianellosche Verfahren zu falschen Ergebnissen führen kann, wäre es wichtig, genügend allgemeine hinreichende Kriterien für seine Gültigkeit zu kennen. Es ist mir trotz vieler Rechnungen nicht gelungen, in dieser Richtung so weit zu kommen, wie ich wollte; ich kann aber doch einige Ergebnisse angeben. Sie folgen aus einem zuerst von Kellogg[9]) bewiesenen Satze, dessen einfachster Fall so lautet:

(K_1). Wenn der stetige, symmetrische Kern $G(r,s)$ für alle r, s des Intervalles nicht-negativ und für $r = s$ mit Ausnahme der Grenzen positiv ist, dann ist der kleinste Eigenwert positiv und die einzige zu ihm gehörige Eigenfunktion ist im Innern des Intervalles positiv.

Kellogg hat diesen Satz verallgemeinert durch Einführung der „assoziierten Kerne“ [10])

$$G\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \dots r_n \\ s_1\, s_2 \dots s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G(r_1, s_1) \dots G(r_1, s_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ G(r_n, s_1) \dots G(r_n, s_n) \end{vmatrix}.$$

Er findet: (K_n). Wenn für

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n, \qquad s_1 < s_2 < \dots < s_n$$

die sämtlichen Kerne

$$G\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \dots r_i \\ s_1\, s_2 \dots s_i \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq n$$

nicht-negativ und im Falle der Gleichheit aller Paare r, s sogar mit Ausnahme der Grenzen positiv sind, dann sind die ersten n Eigenwerte von $G(r,s)$ positiv, zu jedem gehört nur eine Eigenfunktion, und diese haben der Reihe nach

$$0, \ 1, \ \dots, \ n-1$$

Vorzeichenwechsel in dem Intervall. Ihre linearen Kombinationen haben nicht mehr als $n-1$ Vorzeichenwechsel. Alle anderen Eigenfunktionen haben mindestens n Vorzeichenwechsel.

A. Den Satz (K_1) kann man bei dem beiderseits gestützten Balken anwenden. Vianellos Verfahren geht hier von einer überall positiven und konkaven Kurve aus, sodaß $m^{(0)}(s)$ nicht-negativ ist. Ist $G(r,s)$ nirgends negativ, dann sind auch $m^{(1)}(s)$, $m^{(2)}(s), \dots$ nicht-negativ, das gleiche gilt daher auch für die Eigenfunktion, gegen die sie streben [11]). Da aber laut (K_1) bei nicht-negativem und für $r = s$ positivem $G(r,s)$ die zum 1. Eigenwert gehörige Eigenfunktion positiv ist und deshalb wegen der Orthogonalität keine andere nicht-negativ sein kann, so führt das Verfahren in der Tat auf den ersten Eigenwert, w. z. b. w.

[9]) Am. J. of Math. **38** (1916), S. 1 bis 5, und **40** (1918), S. 145 bis 154.
[10]) Enc. Math. Wiss. II 3, S. 1385.
[11]) Genauer gesagt: jede konvergente Teilfolge aus ihnen.

Um das Kriterium auszuwerten, berechnen wir $G(r, s)$, wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise $EJ = \text{const} = 1$ annehmen. Es ist

$$M(x, t) = \begin{cases} t\left(1 - \frac{x}{l}\right) & x \geq t \\ \left(1 - \frac{t}{l}\right) x & x \leq t \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3,1)$$

und daher, für $r \leq s$,

$$G(r, s) = \left(1 - \frac{r}{l}\right)\left(1 - \frac{s}{l}\right)\int_0^r P(t)\,dt - \frac{r}{l}\left(1 - \frac{s}{l}\right)\int_r^s P(t)\,dt + \frac{rs}{l^2}\int_s^l P(t)\,dt \quad \ldots \ldots (3,2).$$

Bezeichnen wir mit P_1, P_2, P_3 Mittelwerte von P in den Intervallen $(0, r)$, (r, s), (s, l), so läßt sich $G(r, s)$ in eine der beiden folgenden Formen setzen:

$$\left.\begin{aligned} G(r, s) &= \left(1 - \frac{s}{l}\right) r \left[\left(1 - \frac{r}{l}\right)(P_1 - P_2) + \left(1 - \frac{s}{l}\right) P_2 + \frac{s}{l} P_3\right] \\ &= \left(1 - \frac{s}{l}\right) r \left[P_1 + \frac{r}{l}(P_2 - P_1) + \frac{s}{l}(P_3 - P_2)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3,21),$$

und daraus ergibt sich: Wenn der beiderseits gestützte Stab überall gedrückt ist ($P \geq 0$) und die Dichten der Längskräfte $p(t)$ überall gleiches Vorzeichen haben ($P(t)$ nicht zunehmend oder nicht abnehmend), dann liefert Vianellos Verfahren die Knicklast. Das Kriterium gilt z. B. im Eulerschen Falle und in Vianellos Beispiel 1. Es ist nicht erfüllt (in unserem Gegenbeispiel und) in Vianellos Beispiel 2, doch läßt sich bei diesem zeigen, daß das allgemeine Kriterium $G(r, s) \geq 0$ hier besteht.

B. Falls eines der beiden Enden eingespannt ist, kommt man mit so einfachen Betrachtungen nicht aus, weil dann $m(s)$ sicher sein Zeichen wechselt. Man muß dann Sätze (K_2) oder (K_3) heranziehen.

Wir beschränken uns auf den Fall $EJ = 1$ (der allgemeine Fall ließe sich nach der gleichen Methode behandeln).

Falls das linke Ende eingespannt, das rechte gestützt ist, findet sich

$$M(x, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2l^2}(3l - t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) = M_+(x, t) & x \geq t \\ M_+(x, t) - (t - x) & x \leq t \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots (3,3),$$

$$\left.\begin{aligned} G(r, s) = {} & \left(1 - \frac{r}{l}\right)\left(1 - \frac{s}{l}\right)\frac{9}{l^2}\int_0^l P(t)\,t^2\left(1 - \frac{t}{2l}\right)^2 dt \\ & - \left(1 - \frac{s}{l}\right)\frac{3}{l}\int_r^l P(t)\,t\left(1 - \frac{t}{2l}\right) dt - \left(1 - \frac{r}{l}\right)\frac{3}{l}\int_s^l P(t)\,t\left(1 - \frac{t}{2l}\right) dt \\ & + \Gamma(r, s) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3,4),$$

$$\Gamma(r, s) = \begin{cases} \int_s^l P(t)\,dt & r \leq s \\ \int_r^l P(t)\,dt & r \geq s \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3,41).$$

Weil $m(r)$ die negative 2. Ableitung der an den beiden Enden verschwindenden Ausbiegung $y(r)$ ist und die erste Ableitung für $r = 0$ verschwindet, ergibt sich

$$0 = -(y(l) - y(0)) = \int_0^l dr \int_0^r m(\varrho)\,d\varrho = \int_0^l (l - r)\,m(r)\,dr,$$

und da diese Orthogonalitätsbeziehung für jede Eigenfunktion des Kerns $G(r,s)$ gilt, so gilt sie nach dem bekannten Satze von E. Schmidt auch für den Kern selbst:

$$\int_0^l (l-r)\, G(r,s)\, d\,r = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3{,}5),$$

was sich auch leicht durch direkte Rechnung bestätigen läßt. Daher hat

$$G_1(r,s) = A\,\frac{3}{l}\left(1-\frac{r}{l}\right)\left(1-\frac{s}{l}\right) + G(r,s) \quad \ldots \ldots \ldots (3{,}6)$$

die gleichen Eigenwerte und Eigenfunktionen wie $G(r,s)$ und dazu noch die ihr Vorzeichen nicht wechselnde Eigenfunktion $1-\frac{r}{l}$ zum Eigenwert $\frac{1}{A}$.

Wir setzen jetzt voraus, daß ein positives A sich so groß wählen läßt, daß $G_1(r,s)$ und $G_1\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ nicht-negativ sind in der Weise, daß den Bedingungen des Kelloggschen Satzes (K_2) genügt ist.

Die Ausgangskurve des Vianelloschen Verfahrens genügt den Randbedingungen, wir haben also, wie oben,

$$\int_0^l (l-r)\, m^{(0)}(r)\, d\,r = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3{,}50).$$

Die weiteren Funktionen $m^{(1)}(r)$, $m^{(2)}(r), \ldots$ erfüllen diese Bedingung gleichfalls infolge der Eigenschaft (3,5) des Kernes. Außerdem wird die Ausgangskurve immer so gewählt, daß die Krümmung und also $m^{(0)}(r)$ nur einmal das Vorzeichen wechselt. Wir wollen der Einfachheit halber darüber hinaus voraussetzen, daß $\frac{m^{(0)}(r)}{l-r}$ eine monoton wachsende Funktion ist, eine Bedingung, die sich leicht erfüllen läßt und bei den üblichen Zeichnungen erfüllt sein wird.

Wir benutzen die folgende, leicht beweisbare Identität[12]. Seien $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ beliebige stetige Funktionen und $K(r,s)$ ein beliebiger stetiger Kern, dann ist

$$\begin{vmatrix} \int_0^l K(r,s_1)\varphi_1(r)\,d\,r & \int_0^l K(r,s_2)\varphi_1(r)\,d\,r \\ \int_0^l K(r,s_1)\varphi_2(r)\,d\,r & \int_0^l K(r,s_2)\varphi_2(r)\,d\,r \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l (\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2) - \varphi_1(r_2)\varphi_2(r_1))\, K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} d\,r_1\, d\,r_2\,.$$

Wir wenden sie an auf

$$\varphi_1(r) = 1-\frac{r}{l}, \qquad \varphi_2(r) = m^{(0)}(r), \qquad K(r,s) = G_1(r,s).$$

Es ist dann

$$\int_0^l K(r,s)\varphi_1(r)\,d\,r = A\left(1-\frac{s}{l}\right),$$

$$\int_0^l K(r,s)\,\varphi_2(r)\,d\,r = \frac{3A}{l}\left(1-\frac{s}{l}\right)\int_0^l\left(1-\frac{r}{l}\right) m^{(0)}(r)\,d\,r + \int_0^l G(r,s)\, m^{(0)}(r)\,d\,r$$

$$= \int_0^l G(r,s)\, m^{(0)}(r)\,d\,r = m^{(1)}(s) \qquad \text{nach (3,50).}$$

Da nun wegen des monotonen Wachstums von $\frac{m^{(0)}(r)}{l-r}$ der Ausdruck

$$l(\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2) - \varphi_1(r_2)\varphi_2(r_1)) = (l-r_1)\,m^{(0)}(r_2) - (l-r_2)\,m^{(0)}(r_1) \qquad (r_1 < r_2)$$

sicher positiv ist, und der positive Charakter von $G_1\begin{pmatrix} r_1 r_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix}$ vorausgesetzt wird, so ist auch

$$\left(1-\frac{s_1}{l}\right) m^{(1)}(s_2) - \left(1-\frac{s_2}{l}\right) m^{(1)}(s_1) \qquad (s_1 < s_2),$$

[12]) Siehe Kellogg: Am. J. Math. **40** (1915), S. 151.

die linke Seite der obigen Integralidentität, sicher positiv. Ebenso weiter die entsprechenden Ausdrücke, die mit $m^{(2)}$, $m^{(3)}, \ldots$ gebildet sind. Hieraus ist aber leicht ersichtlich, daß alle $m^{(1)}(r)$, $m^{(2)}(r), \ldots$ nur einen Vorzeichenwechsel haben. Das gleiche gilt also von $m(r)$ als Grenzfunktion[13]).

Nun haben nach dem Kelloggschen Satz (K_2) die beiden ersten Eigenfunktionen des Kernes $G_1(r,s)$ keinen bzw. einen Vorzeichenwechsel, während alle weiteren Eigenfunktionen mindestens zwei Vorzeichenwechsel haben. Deshalb gehört das nach dem Vianelloschen Verfahren gebildete $m(r)$ sicher zu dem 1. Eigenwert von $G(r,s)$. Also: Falls bei dem linksseitig eingespannten, rechtsseitig gestützten Balken sich ein positives A so groß wählen läßt, daß $G_1(r,s)$ und $G_1\begin{pmatrix} r_1 r_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix}$ nicht-negativ entsprechend den Bedingungen des Kelloggschen Satzes sind, dann liefert das Vianellosche Verfahren in der üblichen Form den Knickwert.

Die Auswertung dieses Kriteriums wird überraschend einfach. Zunächst ist sofort zu übersehen, daß $G_1(r,s)$ durch genügend große Wahl von A positiv gemacht werden kann, außer wenn $r=l$ oder $s=l$ ist, in welchem Falle es verschwindet. Betrachten wir weiter

$$G_1\begin{pmatrix} r_1 r_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A\frac{3}{l}\left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_1}{l}\right)+G(r_1,s_1) & A\frac{3}{l}\left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)+G(r_1,s_2) \\ A\frac{3}{l}\left(1-\frac{r_2}{l}\right)\left(1-\frac{s_1}{l}\right)+G(r_2,s_1) & A\frac{3}{l}\left(1-\frac{r_2}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)+G(r_2,s_2) \end{vmatrix}$$

und ordnen nach Potenzen von A, so fällt das Glied mit A^2 heraus, der Koeffizient von A aber erhält bis auf den Faktor $\frac{3}{l}$ nach einigen Vereinfachungen die Form

$$C(r_1,r_2,s_1,s_2) = \left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_1}{l}\right)\Gamma(r_2,s_2) + \left(1-\frac{r_2}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\Gamma(r_1,s_1)$$
$$-\left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\Gamma(r_2,s_1) - \left(1-\frac{r_2}{l}\right)\left(1-\frac{s_1}{l}\right)\Gamma(r_1,s_2).$$

Betreffs der gegenseitigen Lage der Punkte r_1, r_2, s_1, s_2 können bei Berücksichtigung der Bedingungen $r_1 < r_2$, $s_1 < s_2$ sechs Fälle eintreten, von denen aber wegen der Symmetrie des Kernes $G(r,s)$ nur 3 betrachtet werden müssen:

1. $r_1 < r_2 \leq s_1 < s_2$; $\Gamma(r_1,s_1) = \Gamma(r_2,s_1) = \int_{s_1}^{l} P(t)\,dt$; $\Gamma(r_1,s_2) = \Gamma(r_2,s_2) = \int_{s_2}^{l} P(t)\,dt$,

$$C_1(r_1,r_2,s_1,s_2) = \frac{1}{l}(r_2-r_1)\left[\left(1-\frac{s_1}{l}\right)\int_{s_2}^{l} P(t)\,dt - \left(1-\frac{s_2}{l}\right)\int_{s_1}^{l} P(t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{l}(r_2-r_1)(s_2-s_1)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)(P_2-P_1),$$

wo P_1 den Mittelwert im Intervall (s_1,s_2), P_2 denjenigen im Intervall (s_2,l) bezeichnet.

2. $r_1 \leq s_1 \leq r_2 \leq s_2$; $\Gamma(r_1,s_1) = \int_{s_1}^{l} P(t)\,dt$; $\Gamma(r_2,s_1) = \int_{r_2}^{l} P(t)\,dt$; $\Gamma(r_1,s_2) = \Gamma(r_2,s_2) = \int_{s_2}^{l} P(t)\,dt$,

$$C_2(r_1,r_2,s_1,s_2) = \frac{1}{l}(r_2-r_1)\left[\left(1-\frac{s_1}{l}\right)\int_{s_2}^{l} P(t)\,dt - \left(1-\frac{s_2}{l}\right)\int_{s_1}^{l} P(t)\,dt\right] + \left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\int_{s_1}^{r_2} P(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{l}(r_2-r_1)(s_2-s_1)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)(P_2-P_1) + \left(1-\frac{r_1}{l}\right)\left(1-\frac{s_2}{l}\right)(r_2-s_1)\bar{P}_1,$$

wo P_1 und P_2 die gleiche Bedeutung wie oben haben und $\bar{P}_1$ der Mittelwert in (s_1,r_2) ist.

[13]) Siehe Fußnote [11]).

3. $r_1 \leqq s_1 < s_2 \leqq r_2$; $\Gamma(r_1, s_1) = \int_{s_1}^{l} P(t)\,dt$; $\Gamma(r_1, s_2) = \int_{s_2}^{l} P(t)\,dt$; $\Gamma(r_2, s_1) = \Gamma(r_2, s_2) = \int_{r_2}^{l} P(t)\,dt$,

$$C_3(r_1, r_2, s_1, s_2) = \frac{s_2 - s_1}{l}\left[\left(1 - \frac{s_2}{l}\right)\int_{r_2}^{l} P(t)\,dt - \left(1 - \frac{r_2}{l}\right)\int_{s_2}^{l} P(t)\,dt + \frac{s_2 - r_1}{l}\int_{r_2}^{l} P(t)\,dt\right]$$

$$+\left(1 - \frac{r_2}{l}\right)\left(1 - \frac{s_2}{l}\right)\int_{s_1}^{s_2} P(t)\,dt$$

$$= (s_2 - s_1)\left(1 - \frac{r_2}{l}\right)\left[\frac{r_2 - s_2}{l}(P_2'' - P_2') + \frac{s_2 - r_1}{l} P_2'' + \left(1 - \frac{s_2}{l}\right) P_1\right],$$

wo P_2' und P_2'' die Mittelwerte in den Intervallen (s_2, r_2) und (r_2, l) bezeichnen, während P_1 die gleiche Bedeutung wie oben hat.

Daraus schließen wir: Wenn die P nicht-negativ sind und vom eingespannten zum gestützten Ende nicht abnehmen, dann ist das Vianellosche Verfahren sicher anwendbar.

Die Koeffizienten C_1, C_2, C_3 sind nämlich dann im Kelloggschen Sinne nicht-negativ. Berechnen wir außerdem das konstante Glied von $G_1\binom{r_1 r_2}{s_1 s_2}$ — eine Rechnung, die ich hier unterdrücke —, so zeigt sich, daß dieses, abgesehen von dem nicht-negativen Summanden $\Gamma(r_1, s_1)\Gamma(r_2, s_2) - \Gamma(r_2, s_1)\Gamma(r_1, s_2)$, in jedem der drei Fälle eine lineare Kombination der gleichen Produkte von Differenzen $r_2 - r_1$, $s_2 - s_1$, $1 - \frac{s_2}{l}$, $1 - \frac{r_2}{l}, \ldots$ ist wie das entsprechende C. Wenn daher in einem C die Koeffizienten dieser Potenzprodukte von Null verschieden sind, dann läßt sich durch genügend große Wahl von A sicher $G_1\binom{r_1 r_2}{s_1 s_2}$ überall außer an den Grenzen positiv machen. Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß dieses Ergebnis auch bestehen bleibt, wenn der Koeffizient eines Potenzprodukts Null ist. Hier zeigt nun die Betrachtung des konstanten Gliedes, daß nur das Verschwinden der Differenzen $P_2 - P_1$ oder $P_2'' - P_2'$ Schwierigkeiten macht. Diese Differenzen verschwinden dann und nur dann, wenn $P(t)$ in dem Intervall (s_1, l) bzw. (s_2, l) konstant ist. Unter diesen Umständen ist aber, wie die Rechnung zeigt, das konstante Glied von $G_1\binom{r_1 r_2}{s_1 s_2}$ selbst positiv, so daß auch dann die Bedingungen des Kelloggschen Satzes für $G_1(r, s)$ sichergestellt sind[14]).

C. Zum Schluß sollen noch drei leichter und vollständiger behandelbare Randbedingungen besprochen werden, wobei immer $EJ = 1$ gewählt wird.

Falls das linke Ende eingespannt, das rechte frei ist, wird

$$M(x, t) = \begin{cases} x - t & x \leqq t \\ 0 & x \geqq t \end{cases}.$$

Daraus folgt

$$G(r, s) = \int_{s}^{l} P(t)\,dt \qquad (r \leqq s)$$

[14]) Der gewonnene Satz umschließt insbesondere den Eulerschen Fall. Leider ist er nicht anwendbar auf Vianellos einschlägiges Beispiel 5, wo nämlich die P vom eingespannten zum gestützten Ende abnehmen. Es ist mir auch nicht gelungen, durch Übergang zu iterierten Kernen (die schärfere Kriterien liefern müssen) die Richtigkeit des Verfahrens bei dem Beispiel 5 zu erweisen.

Im Falle des beiderseits eingespannten Balkens scheinen sich aus dem Kelloggschen Satz keine hinreichenden Kriterien ableiten zu lassen. Die Momentenlinien $m(r)$ haben hier mindestens 2 Nullstellen, so daß ein Kriterium (K_3) anzuwenden wäre. Formal bietet sich hierzu auch ein Weg, indem man den Kern

$$G_2(r, s) = A + B\left(1 - \frac{2r}{l}\right)\left(1 - \frac{2s}{l}\right) + G(r, s)$$

heranzieht. Dieser kann aber bei den gewöhnlichen Formen der Biegungslinie — insbesondere im Eulerschen Falle — das Kriterium (K_3) nicht erfüllen. Denn im Eulerschen Falle ist die zu der einfachsten Biegungslinie gehörige Momentenlinie eine Kosinuslinie im Periodenintervall und wird von gewissen Geraden in diesem Intervall in 3 Punkten geschnitten, entgegen dem Kelloggschen Satz.

und ist für $P(t) \geqq 0$ nicht-negativ. Das Vianellosche Verfahren, ausgehend von einer überall konkaven Biegungslinie, führt also zum Ziel[15]). (Vianellos Beispiele 3 und 4.)

Ist das linke Ende gestützt, das rechte in einer senkrecht beweglichen Backe eingespannt (Fall d, § 1), dann ist

$$M(x,t) = \begin{cases} x & x \leqq t \\ t & x \geqq t \end{cases}$$

und also

$$G(r,s) = \int_0^r P(t)\, dt \qquad (r \leqq s).$$

Auch in diesem Falle ist also bei überall gedrückten Stäben ($P(t) \geqq 0$) das Vianellosche Verfahren, ausgehend von einer überall konkaven Biegungslinie, gerechtfertigt. — Bekanntlich bestehen diese Randbedingungen für die linke Hälfte eines beiderseits gestützten, durch Druckkräfte symmetrisch zur Mitte beanspruchten Stabes von der Länge $2l$, falls der Stab symmetrisch ausknickt. Die Knicklast eines gedrückten, beiderseits gestützten, symmetrisch beanspruchten Stabes entspricht also entweder der rein konkaven symmetrischen Ausbiegung oder einer antisymmetrischen Ausbiegung. Bei der antisymmetrischen Ausbiegung erfüllt die Biegungslinie des halben Stabes an beiden Enden die Randbedingung der einfachen Stützung. Nehmen also die Druckkräfte vom linken Ende zur Mitte dauernd zu oder ab, so hat nach den Ergebnissen von Abschnitt A. diejenige antisymmetrische Biegungslinie den kleinsten Eigenwert, die links von der Mitte rein konkav verläuft. Im ganzen also zeigt sich: Wenn ein beiderseits gestützter Stab von Druckkräften beansprucht ist, die zur Mitte symmetrisch sind und von den Enden zur Mitte monoton zu- oder abnehmen, dann ist die der Knicklast entsprechende Ausbiegung entweder die einfachste symmetrische oder die einfachste antisymmetrische. Dieser Satz gibt für den genannten, praktisch wohl wichtigsten Belastungsfall eine willkommene Aufklärung und Ergänzung zu den Betrachtungen des § 2 und zeigt, daß man in diesem Fall durch Anwendung des Vianelloschen Verfahrens auf zwei Ausgangslinien, nämlich auf die linken Hälften der symmetrischen und der antisymmetrischen Biegungslinie, die Knicklast sicher bestimmen kann.

In ähnlicher Weise läßt sich auch der beiderseits eingespannte, symmetrisch beanspruchte Balken behandeln, dem wir wieder die Länge $2l$ geben wollen. Ist die Biegungslinie symmetrisch, so besteht für die linke Balkenhälfte bei 0 die Randbedingung b, bei l die Randbedingung d. Damit ergibt sich

$$M(x,t) = \begin{cases} x - t\left(1 - \dfrac{t}{2l}\right) & x \leqq t \\[2ex] \dfrac{t^2}{2l} & x \geqq t \end{cases}$$

und

$$G(r,s) = \frac{1}{l^2}\int_0^l P(t)\, t^2\, dt - \frac{1}{l}\int_r^l P(t)\, t\, dt - \frac{1}{l}\int_s^l P(t)\, t\, dt + \int_s^l P(t)\, dt \qquad (r \leqq s).$$

Ergänzen wir den Kern zu $G_1(r,s) = A + G(r,s)$, so erfüllt dieser das Kelloggsche Kriterium (K_2) für alle nicht-negativen P. Der Knickwert des gedrückten, beiderseits eingespannten, symmetrisch beanspruchten und symmetrisch ausknickenden Balkens läßt sich daher nach Vianello ermitteln, wenn wir von einer ständig wachsenden Momentenkurve ausgehen[16]).

Ist aber die Biegungslinie antisymmetrisch, so erfüllt das rechte Ende der linken Balkenhälfte die Bedingungen eines gestützten Endes, und wir sind also auf den oben behandelten Fall B. zurückgeführt, der unter Umständen — wenn nämlich an dem symmetrischen Balken die Längskräfte von den Enden nach der Mitte zunehmen — eine Entscheidung durch Vianellos Verfahren zuläßt. 628

[15]) In diesem und den folgenden Fällen ist zwar die Kelloggsche Ungleichung $K(r,r) > 0$ nicht immer erfüllt, dann nämlich nicht, wenn $P(t)$ auf gewissen Strecken identisch verschwindet. Diese Ausnahmen sind aber einfacher Art und beeinträchtigen die Gültigkeit der Resultate nicht, wie man durch leichte Zusatzbetrachtungen erweisen kann.

[16]) Die Beweise, die ganz analog wie unter B. zu führen sind, lasse ich weg.

KLEINE MITTEILUNGEN

Näherungsformel für das Auskühlen einer Platte mit konstanter Anfangstemperatur.

Verwendete Zeichen:

$2\,X$ [m]	Dicke der Platte in Metern.
λ [kcal·m^{-1}·h^{-1}·Grad^{-1}]	Wärmeleitgeschwindigkeit des Plattenstoffes.
γ [kg·m^{-3}]	dessen spez. Gewicht.
c [kcal·kg^{-1}·Grad^{-1}]	dessen spez. Wärme.
ϑ_c [Grad]	Anfangstemperatur der Platte.
ϑ_0 [Grad]	Umgebungstemperatur.
t [h]	Zeit in Stunden.
Q_c [kcal]	Anfänglicher Wärmeinhalt der Platte, über der Umgebungstemperatur gemessen.
Q_t [kcal]	Wärmeinhalt der Platte zur Zeit t.
ϑ_w [Grad]	Wandtemperatur.
α [kcal·m^{-2}·h^{-1}·Grad^{-1}]	Wärmeübergangszahl von der Plattenoberfläche auf die Umgebung.

Abkürzungen: $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$; $h = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Hier soll eine Näherungsformel für den Fall des Auskühlens bzw. Anwärmens einer unendlich ausgedehnten, ebenen Platte endlicher Dicke aus dem Stationärzustand mit überall gleicher Temperatur ϑ_c durch Absenken bzw. Erhöhen der Umgebungstemperatur auf den konstanten Wert ϑ_0 angegeben und ihre Herleitung kurz erläutert werden. Zweck dieser Formel ist es, diese häufige Aufgabe der Berechnung mittels Rechenschieber und e^{-X}-Tafel, wie sie in den meisten Handbüchern zu finden ist, zugänglich zu machen. Die zu diesem Zweck von Prof. Dr. Gröber[1]) errechneten und von G. Pöschl[2]) erweiterten Kurvenblätter haben den Nachteil, daß man den Verlauf der zu berechnenden Größen (Wärmeinhalt und Oberflächentemperatur) nur punktweise erhält, wobei noch gewisse Bereiche der Variablen $h\,X$ stiefmütterlich behandelt sind, da es eben unmöglich ist, den gesamten Bereich von $h\,X = 0$ bis $h\,X = \infty$ auf einem Kurvenblatt darzustellen.

Nach der Fourierschen Theorie ergibt sich der Wärmeinhalt der Platte zur Zeit t:

$$Q_t = Q_c \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin^2 \delta_k}{\delta_k^2 + \delta_k \cdot \sin \delta_k \cdot \cos \delta_k} \cdot e^{-\delta_k^2 \frac{a\,t}{X^2}},$$

wobei die δ_k die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\delta}{h\,X},$$

die sich aus den Anfangsbedingungen ergibt, bedeuten. Jede der wellenförmigen Temperaturverteilungen, aus denen die anfängliche Temperaturverteilung aufgebaut ist, liefert einen Anteil zum

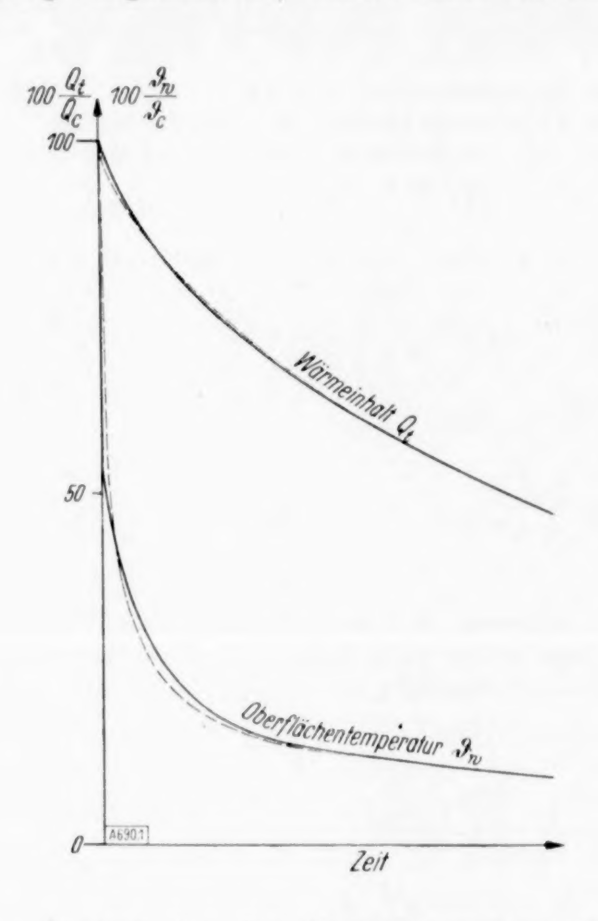


Abb. 1. Verlauf der Oberflächentemperatur und des Wärmeinhaltes bei $h\,X = 10$. (Die gestrichelten Linien geben den tatsächlichen Verlauf an, während die voll ausgezogenen Linien den durch die Formel errechneten Verlauf angeben.)

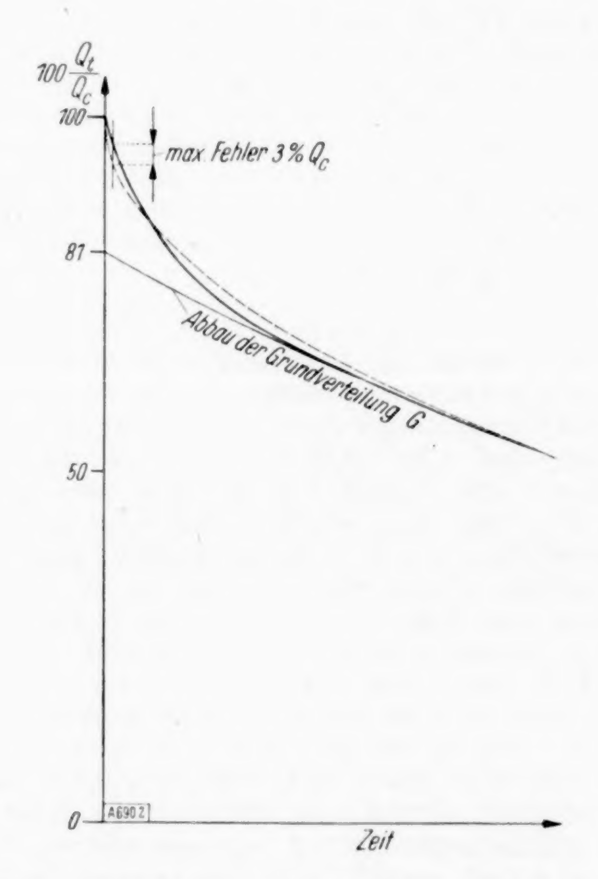


Abb. 2. Verlauf des Wärmeinhaltes bei $h\,X = \infty$.

Wärmeinhalt der Platte, der um so rascher verschwindet, je größer δ_k ist, das heißt, je komplizierter die entsprechende Einzelverteilung ist.

Diese unendliche Reihe zeigt für große Werte von $h\,X$ und für kleine Werte von t eine sehr schlechte Konvergenz, jedoch liefert der erste

[1]) Gröber-Erk: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Verlag Springer, Berlin.

[2]) ZAMM Bd. 12, 1932, Heft 5, S. 280, VDI-Verlag, Berlin.

Summand auch bei ungünstigster Konvergenz, das ist bei $hX = \infty$ und $t = 0$, noch immer $\frac{8}{\pi^2} \sim 81\%$ des Wärmeinhaltes der Platte. Der Anteil des ersten Summanden an Q_c ist eine Funktion von δ_k, also von hX, wird mit G (Grundverteilung) bezeichnet und aus einer unten angegebenen Formel mit hinlänglicher Genauigkeit berechnet.

Der Exponent der e-Potenz, nach welcher die Grundverteilung abklingt, ist ebenfalls eine Funktion von hX und außerdem proportional der Fourierschen Kennzahl $\frac{a \cdot t}{X^2}$. Sämtliche anderen Einzelverteilungen wurden zusammengefaßt und die zeitliche Änderung dieses Restes der Fourierschen Kennzahl proportional und als Funktion von hX derart festgelegt, daß der Fehler möglichst klein bleibt (Abb. 2). Die Formel für den Wärmeinhalt nimmt dann die Gestalt an:

$$100 \frac{Q_t}{Q_c} = G \cdot e^{-k_1 t} + (100 - G) \cdot e^{-k_2 t}.$$

Im Interesse der Einfachheit der Formeln für G, k_1 und k_2 erwies sich eine Teilung des Intervalles als notwendig.

Der praktisch am meisten in Frage kommende Bereich liegt zwischen $hX = 0$ und $hX = 10$, da bei dicken Wänden aus schlechtleitendem Material ein guter Wärmeübergang selten ist. In diesem Bereiche liefert das angegebene Näherungsverfahren unbedingt genauere Werte als die Ablesung aus Kurvenblättern, da der maximale Fehler nur auf den Anfang des Vorganges beschränkt bleibt und stets kleiner ist als 1% des ursprünglichen Wärmeinhaltes der Platte. (1% erst bei $hX = 10$.)

Bei $hX = \infty$ tritt aus Konvergenzgründen der überhaupt größte mögliche Fehler auf. Dieser Fehler beträgt 3% von Q_c, ist also für praktische Anwendungen belanglos, zumal er auf den Beginn des Vorganges beschränkt bleibt und rasch kleiner wird (Abb. 2). Denn bei praktischen Anwendungen liegt die Hauptschwierigkeit in der richtigen Angabe der Stoffwerte und vor allem der Wärmeübergangszahl α, wobei bedeutend größere Ungenauigkeiten auftreten.

Da die Näherungsformel für Q_t beim Differenzieren einen einfachen Ausdruck ergibt, der dieselben Größen wie die Formel selbst enthält, läßt sich für die Oberflächentemperatur ein einfacher Ausdruck herleiten, der allerdings keine so genauen Werte liefert wie die Formel für Q_t, aber den tatsächlichen Verlauf der Oberflächentemperatur sehr charakteristisch und mit praktisch genügender Genauigkeit wiedergibt, indem er das rasche Abfallen der Oberflächentemperatur bei Beginn des Vorganges durch eine Unstetigkeit ersetzt (Abb. 1). Ein Teil der Wand von der Dicke $2X$, der Breite Y und der Höhe Z mit dem Wärmeinhalt $Q_c = c \cdot \gamma \cdot \vartheta_c \cdot 2X Y \cdot Z$ gibt seine Eigenwärme durch eine Oberfläche von der Größe $F = 2 \cdot Y \cdot Z$ an die Umgebung ab. Zur Zeit t fließt durch diese Oberfläche ein Wärmestrom

$$-\frac{dQ_t}{dt} = \frac{Q_c}{100} [k_1 \cdot G \cdot e^{-k_1 t} + k_2 \cdot (100 - G) \cdot e^{-k_2 t}].$$

Hieraus errechnet sich die Oberflächentemperatur:

$$\vartheta_w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{Q_c}{100} \cdot [k_1 \cdot G \cdot e^{-k_1 t} + k_2 \cdot (100 - G) \cdot e^{-k_2 t}],$$

oder:
$$100 \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = \frac{X}{a \cdot h} \cdot [k_1 \cdot G \cdot e^{-k_1 t} + k_2 \cdot (100 - G) \cdot e^{-k_2 t}].$$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, liefert diese Formel erst brauchbare Ergebnisse, wenn der Wärmeinhalt der Platte auf 96% seines Anfangswertes gesunken ist.

Die Näherungsformel und ihre Anwendung. Bei der Stellung der Aufgabe müssen bekannt sein: Die Stoffwerte λ, γ und c der Platte, die Dicke der Platte $2X$, die Anfangstemperatur ϑ_c, die Umgebungstemperatur ϑ_0 und die Wärmeübergangszahl α.

Hieraus berechnet man $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$, $hX = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot X$ und dann je nach der Größe von hX:

für hX kleiner als 1·2:

$$G = 100 - 1{\cdot}3\,(hX)^2,$$

$$k_1 = hX\left[1 - \frac{hX}{3{\cdot}4} + \frac{(hX)^2}{30}\right] \cdot \frac{a}{X^2},$$

$$k_2 = 14 \frac{a}{X^2},$$

für hX größer als 1·2:

$$G = 81 + \frac{90}{hX + 4},$$

$$k_1 = \frac{a}{X^2}\left[1{\cdot}57 - \frac{1{\cdot}57}{hX + 1{\cdot}2}\right]^2,$$

$$k_2 = \frac{a}{X^2}\left[50 - \frac{500}{hX + 13}\right].$$

Mit den so erhaltenen Werten geht man in die Näherungsformeln:

$$100 \frac{Q_t}{Q_c} = G \cdot e^{-k_1 t} + (100 - G) \cdot e^{-k_2 t}$$

(in % von Q_c),

$$100 \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = \frac{X}{a \cdot h} [k_1 \cdot G \cdot e^{-k_1 t} + k_2 \cdot (100 - G)\, e^{-k_2 t}]$$

(in % von ϑ_c, gilt erst ab $Q_t \leq 96\%$ von Q_c).

Diese Formeln lassen sich einfach zeichnerisch darstellen. Sie gelten natürlich auch für den Fall der einseitig vollkommen isolierten Platte, wobei dann die Plattendicke mit X zu bezeichnen ist.

Prag. F. Nistler. 690

BUCHBESPRECHUNGEN

Professor Dr.-Ing. JULIUS **RATZERSDORFER,** Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. IX + 321 S. m. 151 Abb. Wien 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,80 M.

Seit der „Knickfestigkeit" von R. Mayer (erschienen Berlin 1921) erschien in deutscher Sprache keine zusammenfassende Behandlung der für den Ingenieur immer wichtiger werdenden Stabilitätsfragen. Da seither in unseren Kenntnissen über Stabilitätsgrenzen und Labilitätserscheinungen elastischer Tragwerke zahlreiche und erhebliche Fortschritte erzielt wurden, wurde das Fehlen einer modernen Darstellung dieser Fragen immer mehr als störend empfunden. Das Buch von Ratzersdorfer füllt einen großen Teil dieser Lücke aus, wobei es sich glücklich trifft, daß es sich mit zwei andern gleichzeitig erschienenen Büchern über Knickung auf vorteilhafte Weise ergänzt. Das Buch von Mayer behält übrigens wegen der abweichenden Zielsetzung besonders für viele praktische Fragestellungen seinen Wert unvermindert bei.

Die Grundlage der Ausführungen des Verf. bildet die ausführliche Besprechung der Knickfestigkeit des geraden Stabes mit konstantem Querschnitt für verschiedene Fälle der Randlagerung und der Belastung. Es wird sowohl die elastische wie die unelastische Knickung betrachtet. Hinsichtlich der Abhängigkeit der Knickspannungen bzw. des Knickmoduls von der Querschnittsform und den Baustoffeigenschaften im unelastischen Bereich wäre eine eingehendere Darstellung erwünscht gewesen. Das neuere Schrifttum ist teilweise nur ungleichmäßig berücksichtigt worden.

Der nächste Abschnitt behandelt einige Fälle des gedrückten geraden Stabes mit gleichzeitiger Biegungsbeanspruchung. Hier sind jeweils auch die in diesen Fällen besonders wichtigen zweiten Näherungen für die Ausbiegungen angegeben. Sodann folgt ein Abschnitt über den geraden Stab mit stetig veränderlichen Druckspannungen und stetig veränderlichem Stabquerschnitt.

Der eigentliche Wert des Buches liegt in den Abschnitten über die Stabilität des geraden Stabes bei kontinuierlicher Lagerung, die Knickfestigkeit von räumlichen und ebenen Stabwerken sowie das Problem der Seitensteifigkeit. Insbesondere das Gebiet der Fachwerkknickung, zu dem vom Verfasser wertvolle eigene Beiträge gegeben wurden, hat hier eine schöne abgerundete Darstellung gefunden.

Die Behandlung der Knickung von Rahmen und Fachwerken beschränkt sich in der Hauptsache auf den elastischen Bereich. Bei dem großen praktischen Interesse, das die unelastische Knickung hat, wäre bei einer Neuauflage eine Ergänzung nach dieser Richtung erwünscht. In diesem Zusammenhange erschiene auch eine eingehendere Behandlung der z. B. für schwierigere Fälle zur Verfügung stehenden Annäherungsmethoden zweckmäßig.

Den Schluß des Buches bildet ein kurzer Abschnitt über einige Sonderfälle der Stabilität von Bogenträgern in ihrer Ebene, die einer einfachen mathematischen Behandlung zugänglich sind. Die z. B. bei den weitgespannten Bogenbrücken auftretenden Fragen sind jedoch nicht berücksichtigt.

Die oben ausgesprochenen Wünsche vermindern nicht den großen Wert des Buches, das sich bald seinen Platz besonders für das wichtige Gebiet der Knickung von Fachwerken, Rahmen und Stabwerken sichern wird.

Hannover. F. Schleicher. 688

CARL **STØRMER,** Résultats des calculs numériques des trajectoires de corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, IV. Faisceaux de trajectoires de l'infini, avec asymptotes parallèles à l'axe des X. 95 S. V. Faisceaux de trajectoires avec asymptotes parallèles à l'axe magnétiques et normales à cet axe. 91 S. Oslo 1936, I Kommisjon Hos Jacob Dybwad.

In den Jahren 1913 und 1914 hat Størmer eine Reihe von durch numerische Integration eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewonnenen Resultaten über den Verlauf von Elektronenbahnen im Felde eines Elementarmagneten veröffentlicht. Diese Rechnungen hat er im Jahre 1930 zusammen mit einer Reihe jüngerer Fachgenossen wieder aufgenommen. Dabei hat er die Gleichungen aber nicht in der früheren Form benutzt, sondern hat verschiedene für die numerische Integration praktische Umformungen vorgenommen. Der Zweck dieser neuen Rechnungen ist einmal, das Studium der periodischen Elektronenbahnen zu vertiefen, ferner soll eine neue Reihe von Bahnen durch den Anfangspunkt-gewonnen werden und endlich soll eine Schar von Bahnen berechnet werden, die aus dem Unendlichen kommen und die für die Untersuchung der kosmischen Strahlung von Wichtigkeit sind. Die beiden vorliegenden Mitteilungen bringen das durch die außerordentlich mühevollen numerischen Integrationen bis jetzt gewonnene Zahlenmaterial Willers. 697

Dr. GERHARD **HERZBERG,** Professor für Physik an der T. H. Darmstadt, z. Zt. Carnegie Gastprofessor für Physik an der Universität Saskatschewan, Kanada. Atomspektren und Atomstruktur. Eine Einführung für Chemiker, Physiker und Physiko-Chemiker. Wissenschaftliche Forschungsberichte, Naturwissenschaftliche Reihe, herausgegeben von Dr. R. E. Liesegang, Frankfurt a. M. Band 37. XVI + 188 S. mit 79 Abb. und 21 Tabellen. Dresden und Leipzig 1936, Verlag Th. Steinkopff. Preis geb. 14 M.

Die vorliegende Einführung ist für den Lernenden, vor allem den Studierenden, geschrieben. Die Theorie der Spektren wird in den allgemeinen Lehrbüchern der Physik meist kurz behandelt, da ihre Grundlagen relativ einfach sind und im wesentlichen in der Anwendung der Quantentheorie auf freie Atome bestehen. Andererseits ist eine eingehendere Kenntnis der Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten für viele Nachbargebiete in Physik und Chemie unerläßlich und das Erscheinen eines Buches, das auch für den Chemiker verständlich ist, daher sehr zu begrüßen. — Es werden zunächst die Bohrsche Theorie und die Grundtatsachen der Quantenmechanik in Verbindung mit den Einelektronenspektren behandelt. Im 2. Kap. folgen Mehrelektronenspektren, Elektronenspin, Zeeman- und Starkeffekt, usw. Dann bringt Kap. 3 mit dem Pauliprinzip den Zusammenhang von Spektren und periodischen System, Kap. 4 Auswahl- und Intensitätsregeln, Seriengrenzen und Intervallregeln für Multipletts, Kap. 5 Hyperfeinstruktur. Das letzte Kap. enthält Tabellen, Para- und Diamagnetismus und Anwendungen in der Chemie (Valenzbegriff usw.).

Potsdam. Theodor Schmidt. 696

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

KURT **MEUSEMANN**, Kapitänleutnant, und Dr. KURT **STANGE**, Studienrat a. d. Marineschule in Flensburg-Mürwick, Mathematik und Marine. (Mathem.-Physik. Bibl. Reihe I, Nr. 89.) 48 S. m. 37 Abb. i. Text. Berlin u. Leipzig 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Dr. H. **WEINREICH**, Oberstudiendirektor am Schillerrealgymnasium in Stettin, Physikalische Beobachtungs- und Denkaufgaben des Alltags. (Mathem.-Physik. Bibliothek Reihe I, Nr. 90.) 52 S. m. 5 Fig. i. Text. Leipzig u. Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

H. **NEUBER**, Kerbspannungslehre, Grundlagen für genaue Spannungsrechnung. VII + 160 S. m. 106 Abb. i. Text und auf einer Tafel. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 15 M.

EDMUND **LANDAU**, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 35.) 94 S. London 1937, Cambridge University Press. Preis 6 sh.

Dr.-Ing. habil. ULRICH **GRAF**, Dozent a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Darstellende Geometrie. 174 S. m. 281 Abb. Leipzig 1937, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 4 M.

Dr. ROBERT **SAUER**, a. o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Aachen, Projektive Liniengeometrie. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, reine und angewandte Mathematik, Bd. 23.) 194 S. m. 36 Abb. Berlin u. Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter. Preis geb. 9 M.

KURT **MICHEL**, Vom Flohglas zum Elektronenmikroskop. (Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte. 9. Jahrg., Heft 1.) II + 37 S. Berlin 1937, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 0,90 M.

JOSEPH MILLER **THOMAS**, Professor of Mathematics, Duke University, Differential Systems. (American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. XXI.) IX + 119 S. New York 1937, publ. by American Mathematical Society. Preis 2 $.

Verhandlungen der in Helsinki vom 21. bis 25. Juli 1936 abgehaltenen neunten Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission. Redigiert von Generalsekretär ILMARI **BONSDORFF**. 294 S. Helsinki 1937, Osakeyhtiö Weilin & Göös Aktiebolag.

Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrt. 647 S. m. 441 Abb. München und Berlin 1937, Kommissionsverlag G. Oldenbourg. Preis geb. 20 M.

TIBOR **RADO**, Subharmonic Functions. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“ 5. Bd., 1.) V + 56 S. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 6,60 M.

NACHRICHTEN

Dr. A. Kupper †.

Am 12. Juni starb im Alter von 32 Jahren in Ausübung seines Dienstes bei der Erprobung eines Segelflugzeuges den Fliegertod Dr. phil. August Kupper, Abteilungsleiter im Institut für Flugmechanik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt. Die DVL, und mit ihr die technische Wissenschaft, verliert in ihm einen der seltenen Männer, die hohes technisches Können mit strengem wissenschaftlichem Denken in sich vereinigen — befähigt auf beiden Gebieten selbständige Arbeit zu leisten, und vor allem Anregungen aus dem einen Gebiete dem anderen fruchtbar zu machen.

Geboren wurde A. Kupper am 14. März 1905 in Pasing bei München. Herbst 1923 begann er das Studium des Maschinenbaues und der technischen Physik, 1928 promovierte er an der Münchener Universität mit einer Arbeit aus der mathematischen Physik. Schon seit 1924 stand er in naher Beziehung zu der Junkers-Flugzeugwerke-A. G., der er dann von 1930 bis 1932 angehörte. Nach zwei Jahren selbständiger konstruktiver und versuchstechnischer Tätigkeit trat er Anfang 1934 in die DVL ein, wo er (selbst praktischer Flieger) als Leiter an der gleichzeitig versuchstechnisch-fliegerisch und theoretisch tätigen Abteilung für Flugmechanik ein weites, seinen vielseitigen Fähigkeiten angemessenes Betätigungsfeld hatte. Besondere Verdienste erwarb er sich in dieser Stellung um die Förderung der Zusammenarbeit zwischen der DVL und hervorragenden Hochschulwissenschaftlern — war es doch seiner lebhaften Initiative mit zu danken, daß z. B. Prof. Trefftz die Fühlung mit der DVL aufnahm, ja sich sogar entschloß, seine ganze Kraft dem in der DVL bearbeiteten Problemkreise zu widmen — ein Plan, den der Tod schmerzlich vereitelte.

Seine Freunde haben in dem Freunde einen Menschen verloren, der, bei aller Leistung als Ingenieur und Wissenschaftler, die Kraft hatte, auch in unserer Zeit des großen Hastens ein ganzer Mensch zu sein. K. Marguerre. 732

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Die diesjährige wissenschaftliche Tagung der Gesellschaft findet vor dem auf die Zeit vom 19. bis 24. September in Bad Kreuznach anberaumten 13. Deutschen Mathematiker- und Physikertag ebenfalls in Bad Kreuznach am Freitag, den 17. und Sonnabend, den 18. September 1937 statt. Die Hauptversammlung wird am 18. September abgehalten werden. — Es wird gebeten, Vortragsanmeldungen bis spätestens zum 1. August d. J. an den Geschäftsführer der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, Prof. Dr. C. Weber, Dresden-A. 16, Hindenburgufer 15, gelangen zu lassen.

Persönliches.

Das Preußische Staatsministerium hat die von der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin vollzogene Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Göttingen Dr. Ludwig Prandtl zum auswärtigen ordentlichen Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Der Ernst Abbe-Gedenkpreis der Carl Zeiß-Stiftung wurde Prof. Dr. Wilhelm Blaschke-Hamburg verliehen.

Dr. phil. habil. Günther Schulz-Berlin wurde die Dozentur für reine und angewandte Mathematik in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Berlin verliehen.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —
 — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.